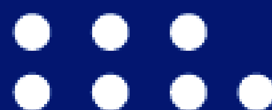
নিম্ন মাধ্যমিক গণিত

সপ্তম শ্রেণী





জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড
ঢাকা

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড কর্তৃক ১৯৯৭ শিক্ষাবর্ষ
থেকে সপ্তম শ্রেণীর পাঠ্যপুস্তকরূপে নির্ধারিত।

নিম্ন মাধ্যমিক গণিত

সপ্তম শ্রেণী

রচনা
সুরুজ উদ্দিন আহমেদ
এ এম এম আহসান উল্লাহ

সম্পাদনা
মোহাম্মদ নূরন্নবী খোন্দকার

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা।

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড
৬৯–৭০, মতিঝিল বাণিজ্যিক এলাকা, ঢাকা
কর্তৃক প্রকাশিত।

প্রথম মুদ্রণ : নভেম্বর, ১৯৯৬
সংশোধিত ও পরিমার্জিত সংস্করণ : নভেম্বর, ২০০০
পরিমার্জিত সংস্করণ : ডিসেম্বর ২০০৮
পুনর্মুদ্রণ :

কম্পিউটার কম্পোজ
ফাইন ডট লিঃ

প্রচ্ছদ
সেলিম আহ্‌মেদ

চিত্রাঙ্কন
রুহুল আমিন বজলু

ডিজাইন
জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড

সরকার কর্তৃক বিনামূল্যে বিতরণের জন্য।

মুদ্রণে :

প্রসঙ্গ কথা

শিক্ষার উন্নয়ন ব্যতীত জাতীয় উন্নয়ন সম্ভব নয়। স্বাধীনতা উত্তর বাংলাদেশের উন্নয়নের ধারায় জনগণের আশা–আকাঙ্ক্ষা, আর্থ–সামাজিক ও সাংস্কৃতিক জীবনপ্রবাহ যাতে পাঠ্যপুস্তকে প্রতিফলিত হয়, সেই লক্ষ্যে জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যসূচি প্রণয়ন কমিটির সুপারিশক্রমে আশির দশকের প্রারম্ভে প্রবর্তিত হয় নিম্ন মাধ্যমিক ও মাধ্যমিক স্তরের শিক্ষার্থীদের জন্য নতুন পাঠ্যপুস্তক। দীর্ঘ এক যুগেরও বেশি সময় ধরে এই পাঠ্যপুস্তকগুলো প্রচলিত ছিল।

উন্নয়নের ধারায় ১৯৯৪ সালে নিম্ন মাধ্যমিক, মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক স্তরের শিক্ষাক্রম সংস্কার, পরিমার্জন ও বাস্তবায়নের জন্য "শিক্ষাক্রম প্রণয়ন ও বাস্তবায়ন সম্পর্কিত টাস্কফোর্স" গঠিত হয়। ১৯৯৫ সালে নতুন শিক্ষাক্রম অনুযায়ী পর্যায়ক্রমে ৬ষ্ঠ থেকে ৯ম শ্রেণীর পাঠ্যপুস্তক রচিত হয়। সময়ের সাথে সাথে দেশ ও সমাজের চাহিদা পরিবর্তনের প্রেক্ষাপটে ২০০০ সালে নিম্ন মাধ্যমিক ও মাধ্যমিক স্তরের প্রায় সকল পাঠ্যপুস্তক উচ্চ পর্যায়ের বিশেষজ্ঞদের দ্বারা যৌক্তিক মূল্যায়নের মাধ্যমে পুনরায় সংশোধন ও পরিমার্জন করা হয়। ২০০৮ সালে শিক্ষা মন্ত্রণালয় কর্তৃক গঠিত শিক্ষা বিষয়ক টাস্কফোর্সের সুপারিশে প্রচ্ছদ প্রণয়ন, বানান ও তথ্যগত বিষয় সংশোধনসহ পাঠ্যপুস্তক আকর্ষণীয় করা হয়েছে। আশা করা যায়, পাঠ্যপুস্তকটি শিক্ষক ও শিক্ষার্থীর নিকট আরো গ্রহণযোগ্য ও সময়োপযোগী বলে বিবেচিত হবে।

শিক্ষাক্রমের আলোকে মূল্যায়নকে আরো ফলপ্রসূ করার জন্য দেশের সুধীজন ও শিক্ষাবিদগণের পরামর্শের প্রেক্ষিতে সরকারি সিদ্ধান্ত অনুযায়ী প্রতিটি অধ্যায় শেষে বহুনির্বাচনি ও সৃজনশীল প্রশ্ন সংযোজন করা হয়েছে। প্রত্যাশা করা যায়, এতে শিক্ষার্থীর মুখস্থনির্ভরতা বহুলাংশে হ্রাস পাবে এবং শিক্ষার্থী তার অর্জিত জ্ঞান ও অনুধাবন বাস্তব জীবনে প্রয়োগ করতে বা যে কোনো বিষয়কে বিচার বিশ্লেষণ অথবা মূল্যায়ন করতে পারবে।

গণিত শিক্ষাকে যুগোপযোগী করার অভিপ্রায়ে এবং আধুনিক শিক্ষার্থীর শিখন চাহিদা অনুযায়ী গণিত শিক্ষার মান আন্তর্জাতিক তুল্যমানে উন্নীত করে আত্মকর্মসংস্থানের সহায়ক করার লক্ষ্যে নিম্ন মাধ্যমিক, মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক স্তরের গণিত শিক্ষাক্রমের পরিমার্জন ও নবায়ন করা হয় এবং শিক্ষার্থীদের মাঝে মূল্যবোধ সৃষ্টির লক্ষ্যে পাঠ্যপুস্তকের বিষয়বস্তুতে এর প্রতিফলন ঘটানো হয়েছে। প্রযোজ্য ও প্রায়োগিক ক্ষেত্রে গণিতের ব্যবহার সহজ করার জন্য পাটিগণিতের পাঠ অষ্টম শ্রেণীর মধ্যে সীমাবদ্ধ রেখে বীজগণিতের ওপর বিশেষ গুরুত্ব আরোপ করা হয়েছে। এ প্রেক্ষিতে বীজগণিতের আনুষ্ঠানিক পাঠ ষষ্ঠ শ্রেণীতে আরম্ভ করা হয়েছে। ফলে শিক্ষার্থীরা গাণিতিক অনেক সমস্যাই বীজগাণিতিক পদ্ধতিতে সহজে সমাধান করার দক্ষতা অর্জন করতে পারবে বলে আশা করা যায়।

গণিতের নিজস্ব একটি বৈশিষ্ট্য আছে। এ বৈশিষ্ট্য অক্ষুণ্ন রেখে স্থান বিষয়ক বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় এর ব্যাপক ব্যবহার কার্যকর করার জন্য শিক্ষার্থীর মাঝে গণিত মনস্কতা সৃষ্টি করা অপরিহার্য। এদিকে বিশেষ লক্ষ রেখে নতুন ধ্যান ধারণা সহজভাবে এবং সম্ভাব্য ক্ষেত্রে অর্ধবাস্তব পর্যায়ে উপস্থাপন করা হয়েছে। ফলে শিক্ষার্থীরা নিজ প্রচেষ্টায় বা শিক্ষকের ন্যূনতম সহায়তায় বিষয়বস্তু আয়ত্ত করতে সক্ষম হবে। গণিত কোনো মুখস্থ বিদ্যা নয়, এটি চর্চার বিষয়। কাজেই শিক্ষার্থীদের সুবিধার্থে পাঠ্যপুস্তকে যে সকল অনুশীলনী ছিল তা যথাযথভাবে রয়েছে এবং প্রতিটি অধ্যায় শেষে বহুনির্বাচনি ও সৃজনশীল প্রশ্ন সংযোজন করা হয়েছে।

আমরা জানি, শিক্ষাক্রম উন্নয়ন একটি ধারাবাহিক প্রক্রিয়া এবং এর ভিত্তিতে পাঠ্যপুস্তক রচিত হয়। কাজেই পাঠ্যপুস্তকের আরো উন্নয়নের জন্য যেকোনো গঠনমূলক ও যুক্তিসঙ্গত পরামর্শ গুরুত্বের সাথে বিবেচিত হবে। ২০২১ সালে স্বাধীনতার সুবর্ণ জয়ন্তীতে প্রত্যাশিত সমৃদ্ধ বাংলাদেশ গড়ার নিরন্তর প্রচেষ্টার অংশ হিসেবে শিক্ষার্থীদের বিজ্ঞানমনস্ক করে তোলার লক্ষ্যে বর্তমান সংস্করণে কিছু পরিমার্জন করা হয়েছে। অতি অল্প সময়ের মধ্যে পরিমার্জিত পাঠ্যপুস্তকগুলো প্রকাশ করতে গিয়ে কিছু ত্রুটি বিচ্যুতি থেকে যেতে পারে। পরবর্তী সংস্করণে পাঠ্যপুস্তকগুলো আরো সুন্দর, শোভন ও ত্রুটিমুক্ত করার চেষ্টা অব্যাহত থাকবে।

যাঁরা এ পাঠ্যপুস্তকটি রচনা, সম্পাদনা, যৌক্তিক মূল্যায়ন, সৃজনশীল প্রশ্ন প্রণয়ন ও প্রকাশনার কাজে আন্তরিকভাবে মেধা ও শ্রম দিয়েছেন, তাঁদের জানাই ধন্যবাদ। যাদের জন্য পাঠ্যপুস্তকটি প্রণীত হল, আশা করি তারা উপকৃত হবে।

প্রফেসর মোঃ মোস্তফা কামালউদ্দিন
চেয়ারম্যান
জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা

সূচিপত্র

নিম্ন মাধ্যমিক গণিত

পাটিগণিত

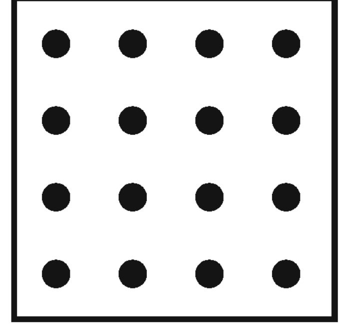
প্রথম অধ্যায়

বর্গমূল

১·১। বর্গমূলের ব্যাখ্যা

আমরা জানি, বর্গ মূলত একটি জ্যামিতিক চিত্র। যে আয়তের বাহুগুলো পরস্পর সমান, তাকে বর্গ বলে এবং বর্গ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রটিকে বর্গক্ষেত্র বলে। বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হল দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের গুণফল। কোনো বর্গক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 'ক' একক হলে তার প্রস্থও 'ক' একক হবে। সেক্ষেত্রে বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল হবে (ক*ক) বর্গ একক বা $ক^২$ বর্গ একক। বিপরীতভাবে বলা যায়, কোনো বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $ক^২$ বর্গ একক হলে, তার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 'ক' একক হবে।

মনে করি, সমান দূরত্বের প্রতিটি সারিতে ৪টি করে (পাশের চিত্র) মোট ৪টি সারিতে মার্বেল সাজানো হল। তাহলে মোট মার্বেলের সংখ্যা হবে, $৪*৪=৪^২=১৬$। [প্রত্যেক সারিতে মার্বেলের সংখ্যা এবং সারির সংখ্যা সমান। তাই চিত্রটি বর্গাকৃতির হবে]। আবার, মনে করি, ১৬টি মার্বেল কয়েকটি সারিতে সাজানো হল।



সারির সংখ্যা যত, প্রতিটি সারিতে সমান সংখ্যক মার্বেল সাজালে দেখা যাবে, সারির সংখ্যা ৪ এবং প্রতিটি সারিতে মার্বেলের সংখ্যাও ৪। এখানে আমরা বলি, ৪ এর বর্গ ১৬ এবং ১৬ এর বর্গমূল ৪।

কোনো সংখ্যাকে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে যে গুণফল পাওয়া যায়, তাকে ঐ সংখ্যার বর্গ বলে এবং সংখ্যাটিকে গুণফলের বর্গমূল বলে। যেমন, ৩ * ৩ বা ৯ কে ৩ এর বর্গ এবং ৩ কে ৯ এর বর্গমূল বলা হয়। ১২ * ১২ বা ১৪৪ হল ১২ এর বর্গ এবং ১২ হল ১৪৪ এর বর্গমূল, ইত্যাদি।

পূর্ণ বর্গসংখ্যা

যে সংখ্যার বর্গমূল কোনো পূর্ণসংখ্যা বা ভগ্নাংশের সমান, তাকে পূর্ণবর্গ বলা হয়। যেমন,

৪, ৯, ১৬, $\frac{৪}{৯}$, $\frac{৯}{১৬}$, $\frac{১৬}{২৫}$, ১৪৪, ২৫৬, ০·০৯।

নিচে বর্গমূলসহ কয়েকটি পূর্ণ বর্গসংখ্যার তালিকা দেওয়া হল :

বর্গসংখ্যা	বর্গমূল	বর্গসংখ্যা	বর্গমূল	বর্গসংখ্যা	বর্গমূল
১	১	৬৪	৮	২২৫	১৫
৪	২	৮১	৯	২৫৬	১৬
৯	৩	১০০	১০	২৮৯	১৭
১৬	৪	১২১	১১	৩২৪	১৮
২৫	৫	১৪৪	১২	৩৬১	১৯
৩৬	৬	১৬৯	১৩	৪০০	২০
৪৯	৭	১৯৬	১৪	৪৪১	২১

ছকটি ভালোভাবে লক্ষ করলে আমরা পাই :

(ক) কোনো সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক ১ বা ৯ হলে, তার বর্গসংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক ১ হবে। যেমন, ১১ এর বর্গ ১২১, ৯ এর বর্গ ৮১, ১৯ এর বর্গ ৩৬১।

(খ) কোনো সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক ২ বা ৮ হলে, তার বর্গসংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক ৪ হবে। যেমন, ২ এর বর্গ ৪, ১২ এর বর্গ ১৪৪, ৮ এর বর্গ ৬৪, ১৮ এর বর্গ ৩২৪।

(গ) কোনো সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক ৩ বা ৭ হলে, তার বর্গসংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক ৯ হবে। যেমন, ৩ এর বর্গ ৯, ৭ এর বর্গ ৪৯, ১৩ এর বর্গ ১৬৯, ১৭ এর বর্গ ২৮৯।

(ঘ) কোনো সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক ৪ বা ৬ হলে, তার বর্গসংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক ৬ হবে। যেমন, ৪ এর বর্গ ১৬, ৬ এর বর্গ ৩৬, ১৪ এর বর্গ ১৯৬, ১৬ এর বর্গ ২৫৬।

(ঙ) কোনো সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক ৫ হলে, তার বর্গসংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক ৫ হবে। যেমন, ৫ এর বর্গ ২৫, ১৫ এর বর্গ ২২৫।

(চ) কোনো সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক ০ হলে, তার বর্গসংখ্যার একক ও দশক স্থানীয় অঙ্ক দুইটিই ০ হবে। যেমন, ১০ এর বর্গ ১০০, ২০ এর বর্গ ৪০০।

(ছ) কোনো পূর্ণ বর্গসংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক ০, ১, ৪, ৫, ৬ বা ৯ হবে।

(জ) কোনো পূর্ণ বর্গসংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক ২, ৩, ৭ বা ৮ হতে পারে না।

বর্গমূলের চিহ্ন

বর্গমূল প্রকাশের জন্য দুইটি প্রতীক চিহ্ন ব্যবহৃত হয়। ২৫ এর বর্গমূল বোঝাতে লেখা হয় $\sqrt{২৫}$ বা $(২৫)^{\frac{১}{২}}$।

আমরা জানি, ৫ * ৫ = ২৫, আবার (−৫) * (−৫) = ২৫। কাজেই ২৫ এর বর্গমূল ৫ বা −৫ হতে পারে। কিন্তু পাটিগণিতে $\sqrt{২৫}$ বা $(২৫)^{\frac{১}{২}}$ বললে শুধুই ৫ বোঝায়।

করণী

যে সংখ্যা পূর্ণবর্গ নয়, তার বর্গমূল সঠিকভাবে নির্ণয় করা যায় না, ঐ ধরনের বর্গমূলকে করণী বা সার্ড বলা হয়। যেমন, $\sqrt{২}, \sqrt{৩}, \sqrt{১০}, \sqrt{\frac{২}{৫}}$ করণী বা সার্ডের বর্গমূল সম্পূর্ণভাবে নির্ণয় করা না গেলেও প্রয়োজনমতো যে-কোনো দশমিক স্থান পর্যন্ত তার বর্গমূল নির্ণয় করা যায়।

১·২। উৎপাদকের সাহায্যে বর্গমূল

উৎপাদকের সাহায্যে কোনো পূর্ণ বর্গসংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করা যায়।

নিয়ম : (১) প্রথমে প্রদত্ত সংখ্যাটিকে মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হয়।

(২) প্রতি জোড়া একই উৎপাদককে একসাথে পাশাপাশি লিখতে হয়।

(৩) প্রতি জোড়া একজাতীয় উৎপাদকের পরিবর্তে একটি উৎপাদক নিয়ে লিখতে হয়।

(৪) লিখিত উৎপাদকগুলোর ধারাবাহিক গুণফল হবে নির্ণেয় বর্গমূল।

স্মরণীয় : প্রতি জোড়া উৎপাদকের জন্য বর্গমূল হবে একটি উৎপাদক।

উদাহরণ ১। ১০২৪ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

সমাধান :

২ | ১০২৪
২ | ৫১২
২ | ২৫৬
২ | ১২৮
২ | ৬৪
২ | ৩২
২ | ১৬
২ | ৮
২ | ৪
২

∴ ১০২৪ = ২ * ২ * ২ * ২ * ২ * ২ * ২ * ২ * ২ * ২

= (২ * ২) * (২ * ২) * (২ * ২) * (২ * ২) * (২ * ২)

সুতরাং, $\sqrt{১০২৪}$ = ২ * ২ * ২ * ২ * ২ = ৩২

উদাহরণ ২। ২৪৫০ সংখ্যাটিকে কত দ্বারা গুণ করলে সংখ্যাটি পূর্ণ বর্গসংখ্যা হবে?

সমাধান : এখানে, ২৪৫০ = ২ * ৫ * ৫ * ৭ * ৭

= ২ * (৫ * ৫) * (৭ * ৭)

দেখা যাচ্ছে, উৎপাদক ২ জোড়াবিহীন। ২ যদি জোড়ায় থাকত তাহলে সংখ্যাটি পূর্ণ বর্গসংখ্যা হত। সুতরাং ২ দ্বারা গুণ করলে সংখ্যাটি পূর্ণ বর্গসংখ্যা হবে।

∴ নির্ণেয় সংখ্যা = ২।

উদাহরণ ৩। কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা দ্বারা ৪৬০৮ কে ভাগ করলে পূর্ণবর্গ পাওয়া যাবে?

সমাধান : এখানে, ৪৬০৮ = ২ * ২ * ২ * ২ * ২ * ২ * ২ * ২ * ২ * ৩ * ৩

= (২ * ২) * (২ * ২) * (২ * ২) * (২ * ২) * ২ * (৩ * ৩)

দেখা যাচ্ছে, শুধুমাত্র উৎপাদক ২ জোড়াবিহীন। সুতরাং, ২ দ্বারা ভাগ করলে সংখ্যাটি পূর্ণবর্গ হবে।

∴ নির্ণেয় ক্ষুদ্রতম সংখ্যা = ২ ।

১·৩। ভাগের সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয়

একটি উদাহরণ দিয়ে ভাগের সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয়ের পদ্ধতি দেখানো হল :

উদাহরণ ৪। ভাগের সাহায্যে ২৩০৪ এর বর্গমূল নির্ণয় কর :

(১) ২৩০৪ সংখ্যাটি লেখ : ২৩০৪

(২) ডানদিক থেকে দুইটি দুইটি অঙ্ক নিয়ে জোড়া বাঁধ। প্রত্যেক জোড়ার উপর রেখা চিহ্ন দাও : $\overline{২৩}\,\overline{০৪}$

(৩) ভাগের সময় যেমন খাড়া দাগ দেওয়া হয়, ডানপাশে তদ্রুপ একটি খাড়া দাগ দাও : $\overline{২৩}\,\overline{০৪}$ |

(৪) প্রথম জোড়াটি ২৩। এর পূর্ববর্তী বর্গসংখ্যাটি ১৬, যার বর্গমূল $\sqrt{১৬}$ বা ৪; খাড়া দাগের ডানপাশে ৪ লেখ। এখন ২৩ এর ঠিক নিচে ১৬ লেখ :

$\overline{২৩}\,\overline{০৪}$ | ৪
১৬

(৫) ২৩ থেকে ১৬ বিয়োগ কর :

$\overline{২৩}\,\overline{০৪}$ | ৪
১৬
৭

(৬) বিয়োগফল ৭ এর ডানে পরবর্তী জোড়া ০৪ কে বসাও। ৭০৪ এর বামদিকে খাড়া দাগ (ভাগের চিহ্ন) দাও :

$\overline{২৩}\,\overline{০৪}$ | ৪
১৬
| ৭০৪

(৭) ভাগফলের ঘরের সংখ্যা ৪ এর দ্বিগুণ ৪ * ২ বা ৮; নিচের খাড়া দাগের বামপাশে বসাও। ৮ এবং খাড়া দাগের মধ্যে একটি অঙ্ক বসানোর মতো স্থান রাখ :

$\overline{২৩}\,\overline{০৪}$ | ৪
১৬
৮ | ৭০৪

(৮) এখন একটি এক অঙ্কের সংখ্যা খুঁজে বের কর যাকে ৮ এর ডানপাশে বসিয়ে প্রাপ্ত সংখ্যাকে ঐ সংখ্যাটি দ্বারা গুণ করে ৭০৪ এর সমান বা অনূর্ধ্ব ৭০৪ পাওয়া যায়। এ ক্ষেত্রে ৮ হবে।

$\overline{২৩}\,\overline{০৪}$ | ৪৮
১৬
৮৮ | ৭০৪
| ৭০৪
০

লক্ষ করি : ৮৮ * ৮ = ৭০৪

(৯) ভাগফলের স্থানে পাওয়া গেল ৪৮। এটিই নির্ণেয় বর্গমূল।

∴ $\sqrt{২৩০৪}$ = ৪৮

ভাগের সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয়ের ব্যাখ্যা :

বীজগণিতের সূত্র থেকে আমরা জানি : [বীজগণিত অংশে ২·২ অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য।]
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a + b)b.$
অতএব, (৩০ + ৬)^২ = ৩০^২+ ২ * ৩০ * ৬ + ৬^২
= ৩০^২ + (২ * ৩০ + ৬) * ৬
এবং ১২৫^২ = (১২০+৫)^২
= ১২০^২ + ২ * ১২০ * ৫ + ৫^২
= ১২০^২ + (২ * ১২০ + ৫) * ৫।

মনে করি, ৭৫৬৯ এর বর্গমূল নির্ণয় করতে হবে।
এখন ৮০^২ = ৬৪০০ এবং ৯০^২ = ৮১০০।
তাহলে, স্পষ্টত ৭৫৬৯ এর বর্গমূল ৮০ অপেক্ষা বেশি এবং ৯০ অপেক্ষা কম হবে;

৭৫৬৯ | ৮০ + ৭
৬৪০০
২ * ৮০ + ৭ = ১৬৭ | ১১৬৯
১১৬৯
০

সুতরাং বর্গমূলের দশক স্থানীয় অঙ্ক ৮ হবে। এখন ৭৫৬৯ থেকে ৮০^২ বা ৬৪০০ বাদ দিলে বিয়োগফল ১১৬৯ হবে এবং তা (২ * ৮০ + বর্গমূলের একক স্থানীয় অঙ্ক) * (ঐ একক স্থানীয় অঙ্ক) এর সমান হবে। পরীক্ষা করে দেখা যায় যে, ঐ একক স্থানীয় অঙ্ক ৭ হবে। কারণ, (২ * ৮০ + ৭) * ৭ = ১১৬৯।
প্রক্রিয়াটি করে দেখানো হল।
তবে কার্যত সাধারণ ভাগের মতো শূন্য বাদ দিয়ে সংক্ষেপে বর্গমূল করা হয়। প্রক্রিয়াটি নিচে দেখানো হল :

৭৫ ৬৯ | ৮৭
৬৪
১৬৭ | ১১ ৬৯
১১ ৬৯
০

উদাহরণ ৫। ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে ৯২৪১৬ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।
সমাধান :

৯ ২৪ ১৬ | ৩০৪
৯
৬০৪ | ২৪ ১৬
২৪ ১৬
০

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল = ৩০৪

লক্ষ করি : জোড় বাঁধতে যেয়ে ৯এর কোনো জোড়া পাওয়া যায়নি। তাই ৯কে জোড় ছাড়াই গণ্য করা হয়েছে। জোড় ২৪ নামানোর পর ৬ এর ডানে যে-কোন সংখ্যা বসিয়ে তা দিয়ে গুণ করলে ২৪এর বেশি হয়। যেমন, ৬১ * ১ = ৬১। তাই ভাগফলের স্থানে শূন্য বসিয়ে জোড় ১৬ নামানো হয়েছে।

উদাহরণ ৬। ৭৪২৮ থেকে কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা বিয়োগ করলে বিয়োগফল একটি পূর্ণ বর্গসংখ্যা হবে? ঐ পূর্ণ বর্গসংখ্যাটি কত?

সমাধান :

```
       __  __
       ৭৪  ২৮ | ৮৬
       ৬৪     |
১৬৬ | ১০  ২৮
    |  ৯  ৯৬
    ----------
          ৩২
```

সুতরাং, ৭৪২৮ সংখ্যাটি পূর্ণবর্গ নয়। ৭৪২৮ থেকে ৩২ বাদ দিলে প্রাপ্ত সংখ্যাটি পূর্ণ বর্গসংখ্যা হবে।

∴ নির্ণেয় সংখ্যাটি হল (৭৪২৮−৩২) বা, ৭৩৯৬।

উদাহরণ ৭। ৬৫১২০১ এর সাথে কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যোগ করলে যোগফল একটি পূর্ণ বর্গসংখ্যা হয়? পূর্ণ বর্গসংখ্যাটির বর্গমূল কত?

সমাধান :

```
         __  __  __
         ৬৫  ১২  ০১ |  ৮০৬
         ৬৪         |
১৬০৬ |    ১  ১২ ০১
     |       ৯৬ ৩৬
     ---------------
          ১৫  ৬৫
```

৬৫১২০১ সংখ্যাটি পূর্ণবর্গ নয়। ক্ষুদ্রতম সংখ্যাটি এর সাথে যোগ করলে তা পূর্ণবর্গ হবে এবং তখন এর বর্গমূল হবে ৮০৬ + ১ = ৮০৭।

∴ নির্ণেয় ক্ষুদ্রতম সংখ্যাটি = ৮০৭ * ৮০৭ − ৬৫১২০১
= ৬৫১২৪৯ − ৬৫১২০১
= ৪৮।

অর্থাৎ, ক্ষুদ্রতম সংখ্যা ৪৮ যোগ করতে হবে।

উত্তর : ক্ষুদ্রতম সংখ্যা ৪৮, বর্গমূল = ৮০৭।

বর্গসংখ্যা ও বর্গমূল সম্বন্ধে উল্লেখ্য বিষয় :

(১) কোনো সংখ্যার প্রতি জোড়া উৎপাদকের জন্য ঐ সংখ্যার বর্গমূলে একটি করে উৎপাদক নিতে হয়।

(২) যে সংখ্যার সর্বডানদিকের অঙ্ক অর্থাৎ একক স্থানীয় অঙ্ক ২ বা ৩ বা ৭ বা ৮ তা পূর্ণবর্গ নয়।

(৩) যে সংখ্যার শেষে বিজোড় সংখ্যক শূন্য থাকে, ঐ সংখ্যা পূর্ণবর্গ নয়।

(৪) একক স্থানীয় অঙ্ক ১ বা ৪ বা ৫ বা ৬ বা ৯ হলে, ঐ সংখ্যা পূর্ণবর্গ হতে পারে। যেমন: ৮১, ৬৪, ২৫, ৩৬, ৪৯ ইত্যাদি। আবার সংখ্যার ডানদিকে জোড়সংখ্যক শূন্য থাকলে ঐ সংখ্যা পূর্ণবর্গ হতে পারে। যেমন: ১০০, ৪৯০০ ইত্যাদি।

(৫) কোনো সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক থেকে শুরু করে বামদিকে এক অঙ্ক পরপর যতটি ফোঁটা দেওয়া যায়, সংখ্যাটির বর্গমূল তত অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা হবে।

যেমন, $\sqrt{৮১}$ = ৯ (এক অঙ্কবিশিষ্ট, এখানে ফোঁটার সংখ্যা ১)

$\sqrt{১০০}$ = ১০ (দুই অঙ্কবিশিষ্ট, এখানে ফোঁটার সংখ্যা ২)

$\sqrt{৪৭০৮৯}$ = ২১৭ (তিন অঙ্কবিশিষ্ট, এখানে ফোঁটার সংখ্যা ৩)

প্রশ্নমালা ১·১

১। উৎপাদকের সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয় কর :

(ক) ৩৬১ (খ) ৭৮৪ (গ) ১২৯৬ (ঘ) ২০২৫

(ঙ) ৩৯৬৯ (চ) ৭৩৯৬ (ছ) ৮১০০ (জ) ৯২১৬।

২। ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয় কর :

(ক) ৭২৯ (খ) ৯৬১ (গ) ৬৫৬১ (ঘ) ৪৯২৮৪

(ঙ) ৫৪৭৫৬ (চ) ৭১৭৪০৯ (ছ) ১৯৩৬০০ (জ) ১০০২০০১।

৩। কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে গুণফল পূর্ণবর্গ হবে?

(ক) ৪৩২ (খ) ২১৮৭ (গ) ২৩৮০৫ (ঘ) ২৩১০৪।

৪। কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল পূর্ণবর্গ হবে?

(ক) ২২০৫ (খ) ২১৮৭ (গ) ১৯২২ (ঘ) ৩০৭২ (ঙ) ৪০৫৬।

৫। এমন একটি লঘিষ্ঠ সংখ্যা নির্ণয় কর, যা ৭২৪৫ থেকে বিয়োগ করলে বিয়োগফল একটি পূর্ণ বর্গসংখ্যা হবে?

৬। ৪৯২৮৯ থেকে কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা বিয়োগ করলে বিয়োগফল পূর্ণ বর্গসংখ্যা হবে?

৭। ৬৫৫৮ এর সাথে কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যোগ করলে যোগফল একটি পূর্ণ বর্গসংখ্যা হবে?

১·৪। দশমিক ভগ্নাংশের বর্গমূল

অখণ্ড বা পূর্ণসংখ্যার বর্গমূল ভাগের সাহায্যে যেভাবে নির্ণয় করা হয়েছে, দশমিক ভগ্নাংশের বর্গমূলও সেই নিয়মেই নির্ণয় করা হয়।

নিয়ম : (ক) অখণ্ড অংশে একক থেকে ক্রমান্বয়ে বামদিকে প্রতি দুই অঙ্কের উপর দাগ দিতে হয়।

(খ) দশমিক অংশে দশমিক বিন্দুর ডানপাশের অঙ্ক থেকে শুরু করে ডানদিকে ক্রমান্বয়ে জোড়ায় জোড়ায় দাগ দিতে হয়। এরূপে যদি দেখা যায় সর্বশেষে মাত্র একটি অঙ্ক বাকি আছে, তবে তারপরে একটি শূন্য বসিয়ে দুই অঙ্কের উপর দাগ দিতে হয়।

(গ) সাধারণ নিয়মে বর্গমূল নির্ণয়ের প্রক্রিয়ায় অখণ্ড অংশের কাজ শেষ করে দশমিক বিন্দুর পরের প্রথম দুইটি অঙ্ক নামানোর আগেই বর্গমূলে দশমিক বিন্দু দিতে হয়।

(ঘ) দশমিক বিন্দুর পর একজোড়া শূন্যের জন্য বর্গমূলে দশমিক বিন্দুর পর একটি শূন্য দিতে হয়।

উদাহরণ ৮। ৬৪৪·১৪৪৪ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

সমাধান :

```
       ৬৪৪·১৪ ৪৪ |২৫·৩৮
       ৪         |
     ----------
  ৪৫ |২৪৪
     |২২৫
      ---------
 ৫০৩ |১৯১৪
     |১৫০৯
      ---------
৫০৬৮ |৪০৫৪৪
     |৪০৫৪৪
      ---------
        ০
```

∴ নির্ণেয় বর্গমূল = ২৫·৩৮।

উদাহরণ ৯। ০·০০১৯৩৬ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

সমাধান :

```
    ০·০০ ১৯ ৩৬ |·০৪৪
         ১৬    |
   ------------
৮৪ |      ৩ ৩৬
   |      ৩ ৩৬
   ------------
          ০
```

∴ নির্ণেয় বর্গমূল = ·০৪৪।

উদাহরণ ১০। ২৫·৪৬২ এর বর্গমূল দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

সমাধান :

```
       ২৫·৪৬ ২০ ০০ |  ৫·০৪৫
       ২৫          |
      -------------
 ১০০৪ |৪৬ ২০
      |৪০ ১৬
       ------------
১০০৮৫ |৬০৪ ০০
      |৫০৪ ২৫
       ------------
        ৯৯ ৭৫
```

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল = ৫·০৫ (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত)

মন্তব্য : বর্গমূলে দশমিকের পর তৃতীয় অঙ্কটি ৫ হওয়ায় দ্বিতীয় অঙ্কটির সাথে ১ যোগ করে নির্ণেয় বর্গমূলের (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত) আসন্ন মান হল ৫·০৫।

নিয়ম :

(১) দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত বর্গমূল নির্ণয় করতে বলা হলে, তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত বর্গমূল নির্ণয় করতে হবে।

(২) তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত বর্গমূল নির্ণয় করতে হলে, সংখ্যার দশমিক বিন্দুর পর কমপক্ষে ৬টি অঙ্ক নিতে হবে। দরকার হলে ডানদিকের শেষ অঙ্কের পর প্রয়োজনমতো শূন্য বসাতে হয়। এতে সংখ্যার মানের পরিবর্তন হয় না।

(৩) বর্গমূলে দশমিকের তৃতীয় অঙ্কটি ০, ১, ২, ৩ বা ৪ হলে, দ্বিতীয় অঙ্কটি যা ছিল তাই থাকবে।

(৪) বর্গমূলে দশমিকের তৃতীয় অঙ্কটি ৫, ৬, ৭, ৮ বা ৯ হলে, দ্বিতীয় অঙ্কটির সাথে ১ যোগ করতে হবে।

উদাহরণ ১১। ৩ এর বর্গমূল দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

সমাধান :

```
        ৩·০০ ০০ ০০ | ১·৭৩২
        ১          |
     ---------------
২৭   | ২০০
     | ১৮৯
     ---------------
৩৪৩  |  ১১০০
     |  ১০২৯
     ---------------
৩৪৬২ |  ৭১০০
     |   ৬৯২৪
     ---------------
          ১৭৬
```

∴ নির্ণেয় বর্গমূল = ১·৭৩ (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত)

প্রশ্নমালা ১·২

নিচের সংখ্যাগুলোর বর্গমূল নির্ণয় কর : (প্রশ্ন ১ – ৯)

১। ·৪৯ ২। ১·২১ ৩। ০·০০২৫ ৪। ৪·৭০৮৯ ৫। ১৫৩·৭৬

৬। ০·০০৫৩২৯ ৭। ০·০০০০৫৬২৫ ৮। ৬৪৪·১৪৪৪ ৯। ১·০০২০০১।

তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত বর্গমূল নির্ণয় কর : (প্রশ্ন ১০ – ১৯)

১০। ৫ ১১। ৮ ১২। ১২·২১ ১৩। ০·৫ ১৪। ·০৩

১৫। ০·৫২৭ ১৬। ২·৭ ১৭। ০·৩ ১৮। ৩·৩৬১ ১৯। ০·০৩৭

১·৫। ভগ্নাংশের বর্গমূল

ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করে ভগ্নাংশের লবের বর্গমূলকে হরের বর্গমূল দ্বারা ভাগ করলে ভগ্নাংশের বর্গমূল পাওয়া যায়। হর যদি পূর্ণ বর্গসংখ্যা না হয়, তবে গুণন দ্বারা তাকে পূর্ণবর্গ করে নিতে হবে।

পূর্ণবর্গ ভগ্নাংশ : কোনো ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করলে যদি তার লব ও হর পূর্ণ বর্গসংখ্যা হয়, তবে ঐ ভগ্নাংশকে পূর্ণবর্গ ভগ্নাংশ বলা হয়।

উদাহরণ ১২। $\frac{১৪৪}{২৮৯}$ এবং $\frac{১৯২}{৩৬৩}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

সমাধান : $\frac{১৪৪}{২৮৯}$ এর বর্গমূল $= \sqrt{\frac{১৪৪}{২৮৯}} = \frac{১২}{১৭}$

$\frac{১৯২}{৩৬৩}$ এর বর্গমূল $= \sqrt{\frac{১৯২}{৩৬৩}}$

$= \sqrt{\frac{৬৪}{১২১}}$ [ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করে]

$= \frac{৮}{১১}$।

উদাহরণ ১৩। $২১০\frac{১}{৪}$ এবং $২৫\frac{২৪২}{২৮৮}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

সমাধান : $২১০\frac{১}{৪}$ এর বর্গমূল $=\sqrt{২১০\frac{১}{৪}} = \sqrt{\frac{৮৪১}{৪}} = \frac{২৯}{২} = ১৪\frac{১}{২}$

$২৫\frac{২৪২}{২৮৮}$ এর বর্গমূল $= \sqrt{২৫\frac{২৪২}{২৮৮}} = \sqrt{\frac{৭৪৪২}{২৮৮}} = \sqrt{\frac{৩৭২১}{১৪৪}} = \frac{৬১}{১২} = ৫\frac{১}{১২}$

উদাহরণ ১৪। $\frac{৫}{১৮}$ এবং $\frac{৭}{১২}$ এর বর্গমূল তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

সমাধান : $\frac{৫}{১৮}$ এর বর্গমূল $= \sqrt{\frac{৫}{১৮}} = \sqrt{\frac{৫ * ২}{১৮ * ২}} = \sqrt{\frac{১০}{৩৬}} = \frac{\sqrt{১০}}{৬} = \frac{৩{\cdot}১৬২২}{৬} = ০{\cdot}৫২৭$

$\frac{৭}{১২}$ এর বর্গমূল $= \sqrt{\frac{৭}{১২}} = \sqrt{\frac{৭ * ৩}{১২ * ৩}} = \sqrt{\frac{২১}{৩৬}} = \frac{\sqrt{২১}}{৬}$

$= \frac{৪{\cdot}৫৮২৫}{৬} = ০{\cdot}৭৬৪$।

প্রশ্নমালা ১·৩

১। নিচের সংখ্যাগুলোর বর্গমূল নির্ণয় কর :

(ক) $\frac{১}{৪৯}$ (খ) $\frac{৯}{১২১}$ (গ) $\frac{১৪৪}{২৮৯}$ (ঘ) $\frac{৪৪১}{১০০০০}$

(ঙ) $৩\frac{২২}{৪৯}$ (চ) $৮৩\frac{১}{৮১}$ (ছ) $৩৮\frac{১১}{২৫}$ (জ) $১০৪\frac{৪০}{৮১}$ ।

২। তিন দশমিক স্থান (প্রয়োজনে আসন্ন মান) পর্যন্ত বর্গমূল নির্ণয় কর :

(ক) $\frac{৫}{৭}$ (খ) $\frac{৫}{১৮}$ (গ) $\frac{৭}{১২}$ (ঘ) $৪\frac{৫}{১২}$

(ঙ) $৮\frac{১৭}{১৮}$ (চ) $\frac{৫}{৩২}$ (ছ) $৪\frac{৩}{১৩}$

১·৬। বর্গমূলের ব্যবহারিক প্রয়োগ

উদাহরণ ১৫। এক সেনাপতি ৬৩০০৯ জন সৈন্য নিয়ে বর্গাকারে সাজাতে গিয়ে দেখলেন ৮ জন সৈন্য উদ্বৃত্ত রয়েছে। প্রত্যেক সারিতে কত জন সৈন্য ছিল?

সমাধান : ৮ জন উদ্বৃত্ত রয়েছে, তাই ৮ জন বাদ দিলে সংখ্যাটি একটি পূর্ণবর্গ হবে।

```
          ৬৩০০৯
          (–)  ৮
        ---------
          ৬৩০০১ | ২৫১
          ৪     |
        ---------
    ৪৫  | ২৩০
        | ২২৫
        ---------
   ৫০১  | ৫০১
        | ৫০১
        ---------
            ০
```

উত্তর : প্রত্যেক সারিতে ২৫১ জন সৈন্য ছিল।

উদাহরণ ১৬। একটি সৈন্যদলকে ৮, ১০ এবং ১২ সারিতে সাজানো যায়। আবার তাদের বর্গাকারে সাজানো যায়। ঐ দলে কমপক্ষে কতজন সৈন্য ছিল?

সমাধান : সৈন্যদলকে ৮, ১০ এবং ১২ সারিতে সাজানো যায়। তাই ঐ সৈন্যসংখ্যা ৮, ১০ এবং ১২ দ্বারা বিভাজ্য। এরূপ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা ৮, ১০ এবং ১২ এর ল.সা.গু.।

২	৮, ১০, ১২
২	৪, ৫, ৬
	২, ৫, ৩

∴ ল.সা.গু. = ২ * ২ * ২ * ৫ * ৩

= ১২০

ল.সা.গু. ১২০ দ্বারা ৮, ১০, ১২ সৈন্যদলকে সাজানো গেলেও বর্গাকারে সাজানো যায় না। কারণ ১২০ বর্গসংখ্যা নয়। এখন ১২০ বা ২ * ২ * ২ * ৫ * ৩ কে বর্গসংখ্যা করতে হলে ল. সা. গু.-কে কমপক্ষে ২ * ৫ * ৩ দ্বারা গুণ করতে হবে।

∴ ৮, ১০ ও ১২ সারিতে ও বর্গাকারে সাজানোর জন্য কমপক্ষে যত সংখ্যক সৈন্য প্রয়োজন তার সংখ্যা

= ২ * ২ * ২ * ২ * ৫ * ৫ * ৩ * ৩ = ৩৬০০।

উত্তর : ৩৬০০ জন সৈন্য।

প্রশ্নমালা ১·৪

১। কোনো বাগানে ৮টি গাছের সারি আছে। প্রত্যেক সারিতে ৮টি করে গাছ লাগালে কতটি গাছের প্রয়োজন হবে?

২। কোনো বাগানে ১০২৪টি নারিকেল গাছ আছে। দৈর্ঘ্য ও বিস্তারে উভয় দিকের প্রত্যেক সারিতে সমান সংখ্যক গাছ থাকলে প্রত্যেকটি সারিতে কতটি গাছ আছে?

৩। ৯২২০ জন সৈন্য থেকে কমপক্ষে কতজন সৈন্য সরিয়ে রাখলে সৈন্যদলকে বর্গাকারে সাজানো যায়?

৪। ৫৬৭২৮ জন সৈন্য থেকে কমপক্ষে কতজন সৈন্য সরিয়ে রাখলে বা তাদের সাথে কমপক্ষে আর কতজন সৈন্য যোগ দিলে সৈন্যদলকে বর্গাকারে সাজানো যায়?

৫। দুইটি সংখ্যার গুণফল ২৬৮৮ এবং ভাগফল $\frac{৬}{৭}$ । সংখ্যা দুইটি কত?

৬। কোনো ক্ষুদ্রতম পূর্ণ বর্গসংখ্যা ৯, ১৫ এবং ২৫ দ্বারা বিভাজ্য?

৭। কোনো শ্রেণীতে যতজন ছাত্র ছিল তাদের প্রত্যেকে তত পাঁচ পয়সা করে চাঁদা দেওয়ায় মোট ১২৫·০০ টাকা হল। ঐ শ্রেণীতে মোট কতজন ছাত্র ছিল?

৮। দুইটি ক্রমিক সংখ্যার বর্গের অন্তর ৯১। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

৯। দুইটি সংখ্যার গুণফল ২২৫০ এবং ভাগফল $\frac{৯}{১০}$ । সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

১০। কোনো বোর্ডিং-এ যত লোক থাকেন, প্রত্যেকে বোর্ডারের সংখ্যার ৪ গুণ টাকা চাঁদা দেওয়ায় মোট ৪৯০০·০০ টাকা চাঁদা উঠে। কতজন লোক থাকেন?

১১। একটি ছাত্রাবাসে যতজন ছাত্র থাকে, তাদের প্রত্যেকের মাসিক খরচ তাদের সংখ্যার ১০ গুণ। মাসিক মোট খরচ ৬২৫০·০০ টাকা হলে, ঐ ছাত্রাবাসে ছাত্রসংখ্যা কত?

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। $\frac{১৪৪}{২৮৯}$ এর বর্গমূল কত ?

ক. $\frac{১২}{১৭}$ খ. $\frac{১২}{২৮৯}$

গ. $\frac{১৪৪}{১৭}$ ঘ. $\frac{১৭}{১২}$

২। ১·২১ এর বর্গমূল কত ?

ক. ১·০১ খ. ১·১০

গ. ১·১১ ঘ. ০·১১০

৩। ০·০৩ এর বর্গ কত ?

ক. ০·০৯০০ খ. ০·৯০০০

গ. ০·০০৯০ ঘ. ০·০০০৯

নিচের তথ্য থেকে ৪ – ৬ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

দুইটি ক্রমিক সংখ্যার বর্গের অন্তর ১১।

৪। একটি সংখ্যা ৬ হলে, অপর সংখ্যাটি কত ?

ক. ৪ খ. ৫

গ. ৭ ঘ. ৮

৫। সংখ্যা দুইটির বর্গের সমষ্টি কত ?

ক. ১৬ খ. ১৭

গ. ৬১ ঘ. ৭১

৬। সংখ্যা দুইটির গুণফল থেকে কত বিয়োগ করলে বিয়োগফল পূর্ণবর্গ হবে ?

ক. ৫ খ. ৬

গ. ৭ ঘ. ৯

৭। i. ৬৪ একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা

ii. ১১২ একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা

iii. ৮১ এর বর্গমূল ৯

ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii

গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। একটি সৈন্য দলকে ৪, ৫ ও ৯ সারিতে সাজানো যায়, কিন্তু বর্গাকারে সাজানো যায় না।

ক. ৯ এর গুণনীয়কগুলো কী কী ?

খ. সৈন্য সংখ্যাকে কোন ক্ষুদ্রতম সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে সৈন্য সংখ্যাকে বর্গাকারে সাজানো যাবে ?

গ. ঐ দলে কমপক্ষে কতজন সৈন্য যোগ দিলে সৈন্য দলকে বর্গাকারে সাজানো যাবে ?

২। একটি ছাত্রাবাসে যতজন ছাত্র থাকে তাদের প্রত্যেকের মাসিক খরচ তাদের সংখ্যার ১০ গুণ। ছাত্রাবাসের মাসিক খরচ ৯০০০ টাকা।

ক. ছাত্র সংখ্যাকে ক ধরে, ক এর মাধ্যমে ছাত্রাবাসের মাসিক খরচকে প্রকাশ কর।

খ. ঐ ছাত্রাবাসের ছাত্রসংখ্যা নির্ণয় কর।

গ. ছাত্রাবাসে ১২ জন ছাত্র আসার পর ছাত্র সংখ্যাকে বর্গাকারে সাজানো যায় না। কমপক্ষে কতজন ছাত্র বাদ দিলে ছাত্র সংখ্যাকে বর্গাকারে সাজানো যাবে?

৩। স্বাধীনতা দিবস উপলক্ষে ভারতেশ্বরী হোমসের ৬৫৫ জনের একটি দল ঢাকা স্টেডিয়ামে ডিসপ্লের জন্য উপস্থিত হয়। দলে ৬ জন শিক্ষক আছেন।

ক. স্টেডিয়ামে উপস্থিত হোমসের শিক্ষার্থী সংখ্যা কত ?

খ. কমপক্ষে কতজন শিক্ষার্থীকে দল থেকে সরিয়ে নেওয়া হলে, শিক্ষার্থী দলকে বর্গাকারে সাজানো যাবে?

গ. কমপক্ষে কতজন শিক্ষার্থী দলে যোগ দিলে তাদেরকে বর্গাকারে সাজানো যাবে?

৪। একজন কৃষকের ৫৩৫ টি আম গাছ ও ১১৫৬ টি নারিকেল গাছ আছে। তিনি তাঁর বাগানের দৈর্ঘ্য ও বিস্তারের উভয়দিকে প্রত্যেক সারিতে সমান সংখ্যক গাছ লাগাতে চান।

ক. তাঁর মোট গাছের সংখ্যা কত ?

খ. তিনি তাঁর বাগানে নারিকেল গাছ লাগালে প্রত্যেক সারির নারিকেল গাছের সংখ্যা নির্ণয় কর।

গ. আর কতটি আম গাছ হলে, তিনি সব গাছকে দৈর্ঘ্য ও বিস্তারের প্রত্যেকটি সারিতে সমান সংখ্যক গাছ লাগাতে পারবেন?

দ্বিতীয় অধ্যায়

অনুপাত, সমানুপাত, মিশ্রণ

২·১। অনুপাত



উপরে ৪টি বৃত্ত আঁকা হয়েছে এবং তাদের ব্যাসের পরিমাপ উল্লেখ করা আছে। বামদিক থেকে ডানদিকে বৃত্তগুলো পর্যায়ক্রমে বড় হয়েছে। আবার বলা যায়, ডানদিক থেকে বামদিকে বৃত্তগুলো পর্যায়ক্রমে ছোট হয়েছে।

এখন প্রথম বৃত্তকে চতুর্থ বৃত্তের সাথে তুলনা করলে আমরা বলতে পারি,

(ক) চতুর্থ বৃত্তের ব্যাস প্রথম বৃত্তের ব্যাসের ৪ গুণ বা, $\frac{৪}{১}$ গুণ;

অথবা, (খ) প্রথম বৃত্তের ব্যাস চতুর্থ বৃত্তের ব্যাসের $\frac{১}{৪}$ অংশ।

(ক) এর ক্ষেত্রে আমরা বলি, চতুর্থ ও প্রথম বৃত্তের ব্যাসের অনুপাত $\frac{৪}{১}$ ।

তদ্রূপ, (খ) এর ক্ষেত্রে বলা হয়, প্রথম ও চতুর্থ বৃত্তের ব্যাসের অনুপাত $\frac{১}{৪}$ ।

অর্থাৎ, দুইটি রাশির তুলনা করতে অনুপাত শব্দটি ব্যবহার করা হয়।

> দুইটি একজাতীয় রাশির একটি অপরটির তুলনায় কতগুণ বা কত অংশ তা একটি ভগ্নাংশ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। এই ভগ্নাংশটিকে রাশি দুইটির অনুপাত বলে।

(ক) এর অনুপাতকে লেখা হয়, ৪ ঃ ১ এবং পড়া হয়, ৪ অনুপাত ১।

আবার, (খ) এর অনুপাতকে লেখা হয়, ১ ঃ ৪ এবং পড়া হয়, ১ অনুপাত ৪।

'ঃ' চিহ্নটি হল অনুপাতের গাণিতিক চিহ্ন। যেমন, ৫ টাকা ও ৩ টাকার অনুপাতকে আমরা ৫ ঃ ৩ দ্বারা প্রকাশ করব।

লক্ষ করি : ১ সে. মি. ও ৪ সে. মি. এর অনুপাত $\frac{১}{৪}$ লেখা হয়েছে।

সুতরাং, ১ ঃ ৪ = $\frac{১}{৪}$।

অতএব, **অনুপাত একটি ভগ্নাংশ। এর কোনো একক নেই।**

২·২। সরল অনুপাতের পূর্ব রাশি ও উত্তর রাশি

সরল অনুপাত : অনুপাতে দুইটি রাশি থাকলে, তাকে **সরল অনুপাত** বলে।
সরল অনুপাতের প্রথম ও দ্বিতীয় রাশিকে যথাক্রমে **পূর্ব রাশি ও উত্তর রাশি** বলা হয়। যেমন, ৭ ঃ ৫ এ পূর্ব রাশি ৭ এবং উত্তর রাশি ৫।

লঘু অনুপাত : পূর্ব রাশি উত্তর রাশির ছোট হলে, তাকে **লঘু অনুপাত** বলে। যেমন, ২ ঃ ৫

গুরু অনুপাত : পূর্ব রাশি উত্তর রাশির বড় হলে, তাকে **গুরু অনুপাত** বলে। যেমন, ৫ ঃ ২

একানুপাত : পূর্ব রাশি ও উত্তর রাশি পরস্পর সমান হলে, তাকে **একানুপাত** বলে। যেমন, ৫ ঃ ৫

২·৩। অনুপাত সম্পর্কিত সাধারণ নিয়ম

(ক) কোনো অনুপাতের পূর্ব রাশি ও উত্তর রাশিকে ০ বাদে একই সংখ্যা দিয়ে গুণ বা ভাগ করলে প্রদত্ত অনুপাতের মানের পরিবর্তন হয় না। যেমন,

৫ ঃ ৪ = (৫ * ১০) ঃ (৪ * ১০) = ৫০ ঃ ৪০

৫০ ঃ ৪০ = (৫০ ÷ ১০) ঃ (৪০ ÷ ১০) = ৫ ঃ ৪

(খ) ভগ্নাংশের মতোই অনুপাতকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করা যায়। যেমন,

৫০ ঃ ৪০ = ৫ ঃ ৪ [পূর্ব রাশি ও উত্তর রাশিকে ১০ দ্বারা ভাগ করে]।

২·৪। বিভিন্ন প্রকারের অনুপাত

(ক) ব্যস্ত অনুপাত : সরল অনুপাতের উত্তর রাশিকে পূর্ব রাশি এবং পূর্ব রাশিকে উত্তর রাশি ধরে প্রাপ্ত অনুপাতকে সরল অনুপাতটির **ব্যস্ত অনুপাত** বলা হয়। যেমন, ১৬ ঃ ৫ এর ব্যস্ত অনুপাত ৫ ঃ ১৬।

(খ) মিশ্র বা যৌগিক অনুপাত : একাধিক সরল অনুপাতের পূর্ব রাশিগুলোর গুণফলকে পূর্ব রাশি এবং উত্তর রাশিগুলোর গুণফলকে উত্তর রাশি ধরে প্রাপ্ত অনুপাতকে **মিশ্র বা যৌগিক অনুপাত** বলে।

উদাহরণ ১। ৪ ঃ ৩, ৭ ঃ ১২, ৯ ঃ ৫ এর মিশ্র অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত অনুপাতগুলোর পূর্ব রাশি ৪, ৭, ৯ এর গুণফল = ৪ * ৭ * ৯ = ২৫২

এদের উত্তর রাশি ৩, ১২, ৫ এর গুণফল = ৩ * ১২ * ৫ = ১৮০

∴ নির্ণেয় মিশ্র অনুপাত = ২৫২ ঃ ১৮০ = ৭ ঃ ৫ [লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করে]

উত্তর : ৭ ঃ ৫।

(গ) **দ্বিগুণানুপাত :** কোনো সরল অনুপাতের পূর্ব রাশির বর্গকে পূর্ব রাশি এবং উত্তর রাশির বর্গকে উত্তর রাশি ধরে প্রাপ্ত অনুপাতকে প্রদত্ত অনুপাতের **দ্বিগুণানুপাতিক** বলা হয়। যেমন,

৭ ঃ ৫ এর দ্বিগুণানুপাত $৭^২$ ঃ $৫^২$ বা, ৪৯ ঃ ২৫।

(ঘ) **দ্বিভাজিত অনুপাত :** কোনো সরল অনুপাতের পূর্ব রাশির বর্গমূলকে পূর্ব রাশি এবং উত্তর রাশির বর্গমূলকে উত্তর রাশি ধরে প্রাপ্ত অনুপাতকে প্রদত্ত অনুপাতের **দ্বিভাজিত অনুপাত** বলা হয়। যেমন,

২৫ ঃ ৯ এর দ্বিভাজিত অনুপাত $\sqrt{২৫}$ ঃ $\sqrt{৯}$ বা, ৫ ঃ ৩।

২·৫। বহুরাশিক অনুপাত

মনে করি, একটি ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, উচ্চতা যথাক্রমে ১৭, ১৫ ও ১০ মিটার।
এখানে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত = ১৭ ঃ ১৫ এবং প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত = ১৫ ঃ ১০
তাহলে, দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত = ১৭ ঃ ১৫ ঃ ১০।
সংক্ষেপে, দৈর্ঘ্য ঃ প্রস্থ ঃ উচ্চতা = ১৭ ঃ ১৫ ঃ ১০।
এটি একটি বহুরাশিক অনুপাত।
এভাবে তিনের অধিক রাশি নিয়েও বহুরাশিক অনুপাত গঠন করা যায়।

উদাহরণ ২। একটি বাগানের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে ১৫ মিটার ও ১০ মিটার ২৫ সে.মি.। বাগানের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত কত?

সমাধান : বাগানটির দৈর্ঘ্য = ১৫ মিটার = (১৫ * ১০০) সে.মি. = ১৫০০ সে.মি.
" প্রস্থ = ১০ মি. ২৫ সে.মি. = (১০ * ১০০ + ২৫) সে.মি. = ১০২৫ সে.মি.।
∴ দৈর্ঘ্য ঃ প্রস্থ = ১৫০০ সে.মি. ঃ ১০২৫ সে.মি.
= ১৫০০ ঃ ১০২৫
= ৬০ ঃ ৪১ [উভয় রাশিকে ২৫ দ্বারা ভাগ করে]

উত্তর : ৬০ ঃ ৪১।

মন্তব্য : অনুপাতের উভয় রাশিকে একই এককে পরিণত করে নিতে হবে।

উদাহরণ ৩। নিচের অনুপাতগুলোর ব্যস্ত অনুপাত, দ্বিগুণানুপাত ও দ্বিভাজিত অনুপাত নির্ণয় কর :

(ক) ৭ ঃ ১৬ (খ) ৪ ঃ ২৫।

সমাধান : (ক) ৭ ঃ ১৬ এর ব্যস্ত অনুপাত ১৬ ঃ ৭
৭ ঃ ১৬ এর দ্বিগুণানুপাত $৭^২$ ঃ $১৬^২$ বা, ৪৯ ঃ ২৫৬
৭ ঃ ১৬ এর দ্বিভাজিত অনুপাত $\sqrt{৭}$ ঃ $\sqrt{১৬}$ বা, $\sqrt{৭}$ ঃ ৪
(খ) ৪ ঃ ২৫ এর ব্যস্ত অনুপাত ২৫ ঃ ৪
৪ ঃ ২৫ এর দ্বিগুণানুপাত $৪^২$ ঃ $২৫^২$ বা, ১৬ ঃ ৬২৫
৪ ঃ ২৫ এর দ্বিভাজিত অনুপাত $\sqrt{৪}$ ঃ $\sqrt{২৫}$ বা ২ ঃ ৫।

উদাহরণ ৪। পিতা ও পুত্রের বয়সের অনুপাত ১১ ঃ ৪। পুত্রের বয়স ১৬ বছর হলে, পিতার বয়স কত?

সমাধান : পিতার বয়স ঃ পুত্রের বয়স = ১১ ঃ ৪

অর্থাৎ, পিতার বয়স পুত্রের বয়সের $\frac{১১}{৪}$ গুণ

সুতরাং, পিতার বয়স = $\frac{১১}{৪}$ * পুত্রের বয়স

= ($\frac{১১}{৪}$ * ১৬) বছর

= ৪৪ বছর।

উত্তর : ৪৪ বছর।

প্রশ্নমালা ২·১

১। প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশির অনুপাতে প্রকাশ কর :

(ক) ৭·৫ ও ৩·৫ (খ) $৮\frac{১}{২}$ ও $৫\frac{১}{১০}$

(গ) ৫ ঘণ্টা ১০ মিনিট ও ৩ ঘণ্টা (ঘ) ১০ মি. ও ৫ মি. ৭ সে.মি.

(ঙ) ৫ কি. গ্রা. ও ৭ কি. গ্রা. ৯ গ্রাম (চ) ২ বছর ৬ মাস ও ৫ বছর

২। নিম্নের সরল অনুপাতগুলোকে মিশ্র অনুপাতে প্রকাশ কর:

(ক) ৭ ঃ ৫, ৪ ঃ ১৩, ১১ ঃ ৭ (খ) ৫ ঃ ৯, ৪ ঃ ১৭, ৩ ঃ ১১

(গ) ৬ ঃ ১৩, ৭ ঃ ১২, ২৬ ঃ ৩ (ঘ) ৮ ঃ ৭, ১৪ ঃ ২৩, ৪৬ ঃ ৯

৩। বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত ২২ ঃ ৭। যে বৃত্তের ব্যাস ৪ মি. ২০ সে.মি., ঐ বৃত্তের পরিধি কত?

৪। আজমল সাহেব ও তাঁর পুত্রের বয়সের অনুপাত ৯ ঃ ২। পুত্রের বয়স ১২ বছর হলে, আজমল সাহেবের বয়স কত?

৫। ৩ ঃ ৭, ৫ ঃ ৯ ও ৭ ঃ ১১ অনুপাতগুলোর মধ্যে কোনটি সর্বাপেক্ষা বড়?

৬। দুইটি বইয়ের দামের অনুপাত ৩ ঃ ৫। প্রথমটির দাম ১৯·২০ টাকা হলে, দ্বিতীয়টির দাম কত?

৭। স্বর্ণ ও রূপা মিশিয়ে একটি ৩০ গ্রাম ওজনের গয়না তৈরি করা হয়েছে। ঐ গয়নায় স্বর্ণের ওজন ২৫ গ্রাম হলে, রূপা ও স্বর্ণের ওজনের অনুপাত কত?

৮। মনোয়ারা ও শিপ্রার বয়সের অনুপাত ৭ ঃ ৪। মনোয়ারার বয়স ৩৫ বছর হলে, শিপ্রার বয়স কত?

৯। লাল, হলুদ ও সাদা রং এর তিনটি বলের মধ্যে লাল ও হলুদ বলের ওজনের অনুপাত ৫ ঃ ৬। হলুদ ও সাদা বলের ওজনের অনুপাত ৫ ঃ ৪। হলুদ বলের ওজন ১৮০ গ্রাম হলে, সাদা ও লাল বলের ওজনের অনুপাত নির্ণয় কর।

১০। দুইটি টেলিভিশনের দামের অনুপাত ৪ ঃ ৩ এবং দ্বিতীয়টির দাম ২১,০০০·০০ টাকা। প্রথমটির দাম যদি ১,০০০·০০ টাকা বেশি হত, তবে এদের দামের অনুপাত কত হত?

১১। দুইটি সংখ্যার যোগফল ৪৫০। এদের অনুপাত ৮ ঃ ৭ হলে, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

১২। আশীষ সাইকেলে ৩ ঘণ্টায় $১৬\frac{১}{২}$ কিলোমিটার এবং বাবু ৪ $\frac{১}{২}$ ঘণ্টায় $১৮\frac{৯}{১০}$ কিলোমিটার যায়। তাদের গতিবেগের অনুপাত নির্ণয় কর।

২·৬। ধারাবাহিক অনুপাত

দুইটি অনুপাত ক ঃ খ এবং খ ঃ গ আকারের হলে, তাদের সাধারণত ক ঃ খ ঃ গ আকারে লেখা হয়। একে ধারাবাহিক অনুপাত বলা হয়। যে-কোন দুইটি প্রদত্ত অনুপাতকে ধারাবাহিক অনুপাতে প্রকাশ করা যায়।

লক্ষ করি : * প্রথম অনুপাত ক ঃ খ এর উত্তর রাশি খ।

* আবার দ্বিতীয় অনুপাত খ ঃ গ এর পূর্ব রাশি খ।

সুতরাং প্রথম অনুপাতের উত্তর রাশি ও দ্বিতীয় অনুপাতের পূর্ব রাশি পরস্পর সমান হলে, তাদের ধারাবাহিক অনুপাতে প্রকাশ করা যায়।

উদাহরণ ৫। ৫ ঃ ৭ ও ৯ ঃ ১১ কে ধারাবাহিক অনুপাতে প্রকাশ কর।

সমাধান : প্রথম অনুপাত = ৫ ঃ ৭

= (৫ * ৯) ঃ (৭ * ৯)

= ৪৫ ঃ ৬৩

দ্বিতীয় অনুপাত = ৯ ঃ ১১

= (৯ * ৭) ঃ (১১ * ৭)

= ৬৩ ঃ ৭৭।

∴ প্রদত্ত অনুপাত দুইটির ধারাবাহিক অনুপাত ৪৫ ঃ ৬৩ ঃ ৭৭

উত্তর : ৪৫ ঃ ৬৩ ঃ ৭৭।

নিয়ম : দুইটি অনুপাতকে ধারাবাহিক অনুপাতে প্রকাশ করার জন্য প্রথম অনুপাতের রাশি দুইটিকে দ্বিতীয় অনুপাতের পূর্ব রাশি দ্বারা এবং দ্বিতীয় অনুপাতের উভয় রাশিকে প্রথম অনুপাতের উত্তর রাশি দ্বারা গুণ করতে হবে।

২·৭। মিশ্রণ

একাধিক জিনিস মিশিয়ে মিশ্রণ তৈরি করা হয়। যে জিনিসগুলো দিয়ে মিশ্রণ তৈরি করা হয় তাদেরকে মিশ্রণের উপাদান বলে। যেকোন আনুপাতিক হারে উপাদান মিশিয়ে মিশ্রণ তৈরি করা যেতে পারে। যেমন, ১০ লিটার সিরাপের সঙ্গে ২ লিটার পানি মিশিয়ে মিশ্রণ তৈরি করা যায়। আমরা এই মিশ্রণকে বলি, পানি–মিশ্রিত সিরাপ। এ পানি–মিশ্রিত সিরাপের মধ্যে সিরাপ ও পানির অনুপাত = ১০ লিটার ঃ ২ লিটার = ১০ ঃ ২ = ৫ ঃ ১।
রাসায়নিক প্রক্রিয়ায় নির্দিষ্ট অনুপাতে একাধিক বস্তু বা পদার্থ মিশিয়ে নতুন একটি পদার্থ তৈরি করা যায়, তাকে মিশ্রণ না বলে যৌগ বলা হয়। যেমন, রাসায়নিক প্রক্রিয়ায় জিঙ্ক ও অক্সিজেন ১৩০·৭৬ ঃ ৩২ অনুপাতে মেশালে জিঙ্ক অক্সাইড পাওয়া যায়।

উদাহরণ ৬। ৬ কেজি এমোনিয়া, ৮ কেজি পটাশ ও ২০ কেজি গোবর সার মিশিয়ে একরকমের মিশ্র-সার তৈরি করা হয়েছে। ঐ মিশ্র-সারে এমোনিয়া, পটাশ ও গোবর-সারের ওজনের অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান : এমোনিয়ার ওজন ঃ পটাশের ওজন ঃ গোবর সারের ওজন

= ৬ কেজি ঃ ৮ কেজি ঃ ২০ কেজি

= ৬ ঃ ৮ ঃ ২০ = ৩ ঃ ৪ ঃ ১০ [অনুপাতের প্রত্যেক রাশিকে ২ দ্বারা ভাগ করে]

উত্তর : ৩ ঃ ৪ ঃ ১০।

২·৮। সমানুপাত

মনে করি, ৪টি রাশি যথাক্রমে ৬ কেজি, ৮ কেজি, ২৪ টাকা ও ৩২ টাকা।
এখন, প্রথম রাশি ঃ দ্বিতীয় রাশি = ৬ কেজি ঃ ৮ কেজি = ৬ ঃ ৮ = ৩ ঃ ৪
আবার, তৃতীয় রাশি ঃ চতুর্থ রাশি = ২৪ টাকা ঃ ৩২ টাকা = ২৪ ঃ ৩২ = ৩ ঃ ৪
সুতরাং, প্রথম রাশি ঃ দ্বিতীয় রাশি = তৃতীয় রাশি ঃ চতুর্থ রাশি
∴ দুইটি অনুপাত পরস্পর সমান।
এক্ষেত্রে ৪টি রাশি যথাক্রমে ৬ কেজি, ৮ কেজি, ২৪ টাকা, ৩২ টাকা একটি সমানুপাত উৎপন্ন করেছে। প্রদত্ত ৪টি রাশিকে সমানুপাতী বলা হয়।

> ৪টি রাশির প্রথম ও দ্বিতীয়টির অনুপাত এবং তৃতীয় ও চতুর্থটির অনুপাত পরস্পর সমান হলে, ঐ ৪টি রাশি একটি সমানুপাত উৎপন্ন করে। সমানুপাতের ৪টি রাশিকে সমানুপাতী বলা হয়।

মন্তব্য : সমানুপাতের ৪টি রাশিই একজাতীয় হওয়ার প্রয়োজন নেই। প্রত্যেক অনুপাতের রাশি দুইটি একজাতীয় হলেই চলে।

সমানুপাতের চতুর্থ রাশিকে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশির চতুর্থ সমানুপাতী বলে।

প্রান্তীয় রাশি : সমানুপাতের প্রথম ও চতুর্থ রাশিকে **প্রান্তীয় রাশি** বলে।
মধ্য রাশি : সমানুপাতের দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশিকে **মধ্য রাশি** বলে।

৬ ঃ ৮ = ২৪ ঃ ৩২ সমানুপাতকে সাধারণত ৬ ঃ ৮ ঃঃ ২৪ ঃ ৩২ লেখা হয়।
এখানে (=) চিহ্নের পরিবর্তে ‘ঃঃ’ চিহ্ন ব্যবহার করা হয়।
উপরের সমানুপাতে **লক্ষ করি** ঃ ১ম রাশি   ২য় রাশি

৬ * ৩২ = ৮ * ২৪

৪র্থ রাশি   ৩য় রাশি

সাধারণভাবে, সমানুপাতের ১ম রাশি * ৪র্থ রাশি = ২য় রাশি * ৩য় রাশি।

উদাহরণ ৭। ৫, ৮, ১৫ এর চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর।

সমাধান : ৪টি রাশি সমানুপাতী হলে,
১ম রাশি * ৪র্থ রাশি = ২য় রাশি * ৩য় রাশি
এখানে, ১ম রাশি = ৫, ২য় রাশি = ৮, ৩য় রাশি = ১৫
∴ ৫ * চতুর্থ রাশি = ৮ * ১৫

$$\therefore \text{ চতুর্থ রাশি} = \frac{৮ * \overset{৩}{\cancel{১৫}}}{\underset{১}{\cancel{৫}}} = ২৪$$

উত্তর : ২৪।

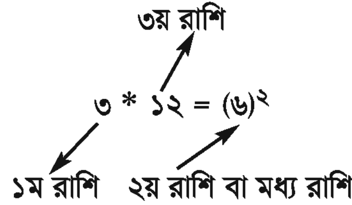
২·৯। ক্রমিক সমানুপাত

মনে করি, তিনটি রাশি যথাক্রমে ৩ কেজি, ৬ কেজি ও ১২ কেজি। এ রাশিগুলো দ্বারা দুইটি অনুপাত ৩ ঃ ৬ এবং ৬ ঃ ১২ গঠন করা যায়। এখানে, ৩ ঃ ৬ ঃঃ ৬ ঃ ১২।
এ রকমের সমানুপাতকে ক্রমিক সমানুপাত বলা হয়। ৩ কেজি, ৬ কেজি ও ১২ কেজি রাশি তিনটিকে সমানুপাতী বলে।

> তিনটি প্রদত্ত রাশির প্রথম ও দ্বিতীয়টির অনুপাত এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয়টির অনুপাত পরস্পর সমান হলে, সমানুপাতটিকে ক্রমিক সমানুপাত বলে। রাশি তিনটিকে ক্রমিক সমানুপাতী বলা হয়।

দ্বিতীয় রাশিটিকে প্রথম ও তৃতীয় রাশির মধ্য সমানুপাতী বা মধ্য রাশি বলা হয়।
মন্তব্য : ক্রমিক সমানুপাতের তিনটি রাশিই একজাতীয়।

ক্রমিক সমানুপাতে **লক্ষ করি :**



সাধারণভাবে, ক্রমিক সমানুপাতের ১ম রাশি * ৩য় রাশি = (২য় রাশি)^{২}।

উদাহরণ ৮। একটি ক্রমিক সমানুপাতীর প্রথম ও তৃতীয় রাশি যথাক্রমে ৬ ও ২৪। মধ্য সমানুপাতী নির্ণয় কর এবং ক্রমিক সমানুপাতটি লেখ।

সমাধান : আমরা জানি, ক্রমিক সমানুপাতে
(মধ্য রাশি)^{২} = ১ম রাশি * ৩য় রাশি
এখানে, ১ম রাশি = ৬, ৩য় রাশি = ২৪
∴ (মধ্য রাশি)^{২} = ৬ *২৪ = ১৪৪
অর্থাৎ, মধ্য রাশি = $\sqrt{১৪৪}$ = ১২।
এবং নির্ণেয় ক্রমিক সমানুপাত ৬ ঃ ১২ ঃঃ ১২ ঃ ২৪
উত্তর : মধ্য রাশি ১২, ক্রমিক সমানুপাত ৬ ঃ ১২ ঃঃ ১২ ঃ ২৪।

২·১০। ত্রৈরাশিক

আগেই বলা হয়েছে, একটি সমানুপাতের ৪টি রাশির ক্ষেত্রে,
১ম রাশি * ৪র্থ রাশি = ২য় রাশি * ৩য় রাশি
এখন, ১ম রাশি, ২য় রাশি ও ৩য় রাশি যথাক্রমে ৭, ১৪, ১৫ হলে,
৭ * ৪র্থ রাশি = ১৪ * ১৫

∴ ৪র্থ রাশি = $\frac{\overset{২}{\cancel{১৪}} * ১৫}{\underset{১}{\cancel{৭}}}$ = ৩০

অর্থাৎ, সমানুপাতের তিনটি রাশি জানা থাকলে ৪র্থ রাশিটি নির্ণয় করা যায়। এভাবে ৪র্থ রাশি নির্ণয় করার পদ্ধতিকে ত্রৈরাশিক বলা হয়।

উদাহরণ ৯। ৮ কেজি চালের দাম ১২০ টাকা হলে, ১২ কেজি চালের দাম কত?

সমাধান : চালের পরিমাণ যে অনুপাতে বাড়ে চালের দামও ঐ অনুপাতে বাড়বে।

অর্থাৎ, চালের পরিমাণের অনুপাত = চালের দামের অনুপাত

∴ ৮ কেজি ঃ ১২ কেজি = ১২০ টাকা ঃ নির্ণেয় দাম

বা, ৮ ঃ ১২ = ১২০ টাকা ঃ নির্ণেয় দাম

এখানে, ১ম রাশি = ৮, দ্বিতীয় রাশি = ১২, তৃতীয় রাশি = ১২০ টাকা

∴ ৮ * নির্ণেয় দাম = ১২ * ১২০ টাকা

∴ নির্ণেয় দাম = $\frac{১২ * ১২০}{৮}$ টাকা = ১৮০ টাকা।

উত্তর : ১৮০ টাকা।

মন্তব্য : উপরের নিয়মে চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয়ের পদ্ধতিকে সরল ত্রৈরাশিক বলা হয়। সরল ত্রৈরাশিক পদ্ধতিতে সমস্যার সমাধানের ক্ষেত্রে নিচের নিয়মগুলো অনুসরণ করতে হয় :

(১) প্রদত্ত রাশিগুলোর যেটি নির্ণেয় রাশির জাতীয় ঐটি সমানুপাতের তৃতীয় রাশি। নির্ণেয় রাশিটি হবে চতুর্থ রাশি।

(২) প্রদত্ত রাশিগুলোর অপর রাশি দুইটি যথাক্রমে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির স্থানে বসাতে হয়। এরা একক ছাড়া হবে [কারণ উপরের উদাহরণে ৮ কেজি ঃ ১২ কেজি = ৮ ঃ ১২]।

(৩) তৃতীয় রাশির একক এবং নির্ণেয় রাশির একক একই হবে।

উদাহরণ ১০। ৮ জন লোক একটি কাজ ১০ দিনে করতে পারে। একই হারে কাজ করলে ২০ জনে ঐ কাজ কত দিনে করতে পারবে?

সমাধান : লোকের সংখ্যা যে অনুপাতে বাড়বে বা কমবে, কাজের দিনের সংখ্যা যথাক্রমে ঐ অনুপাতে কমবে বা বাড়বে। অর্থাৎ লোকের সংখ্যার ব্যস্ত অনুপাত কাজের দিনের সংখ্যার সরল অনুপাতের সমান হবে।

এখানে, <u>লোকের সংখ্যা</u>	<u>সময়</u>
৮ জন	১০ দিন
২০ জন	নির্ণেয় সময়

∴ ২০ ঃ ৮ = ১০ দিন ঃ নির্ণেয় সময়

∴ ২০ * নির্ণেয় সময় = ৮ * ১০ দিন

∴ নির্ণেয় সময় = $\frac{৮ * ১০}{২০}$ দিন = ৪ দিন

উত্তর : ৪ দিন।

মন্তব্য : উপরের নিয়মে চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয়ের পদ্ধতিকে ব্যস্ত ত্রৈরাশিক বলা হয়।

প্রশ্নমালা ২·২

১। নিচে তিনটি ক্রমিক সমানুপাতীর প্রান্তীয় রাশি দুইটি দেওয়া আছে, সমানুপাতটি লেখ :

(ক) ৫, ৪৫ (খ) ২৫, ৮১ (গ) $\frac{৩}{৫}$, ১ $\frac{২}{৩}$ (ঘ) ১·৫, ১৩·৫।

২। □ ঘরে সঠিক সংখ্যাটি বসাও :

(ক) ১২ : ১৬ :: □ : ২০ (খ) ৪ : □ :: ৯ : ১৮

(গ) ২·৬ : ১·৩ :: ১·১ : □ (ঘ) $\frac{১}{৩}$: $\frac{১}{৫}$ :: □ : $\frac{৩}{১০}$।

৩। নিচের সংখ্যাগুলোর চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর :

(ক) ৫, ১০, ৮ (খ) ২৪, ৩২, ৩৬ (গ) ৪, ৪$\frac{১}{২}$, ২ (ঘ) ১০, ৪০, ৫০ (ঙ) ৩, ৪·৫, ৮।

৪। ৫০ কেজি দুধের সাথে ৫ কেজি চিনি মেশানো হল। চিনি-মিশ্রিত দুধে চিনি ও দুধের অনুপাত কত?

৫। একজন কৃষকের নিকট গোবর সার ও এমোনিয়া সার যথাক্রমে ৪০ কুইন্টাল ও ১৬ কুইন্টাল আছে। তিনি কিছু পরিমাণ পটাশ সার ক্রয় করে সম্পূর্ণ সার গোবর ও এমোনিয়া সারের সঙ্গে মেশালেন। এতে মিশ্র–সারে এমোনিয়াম, গোবর ও পটাশ সারের অনুপাত হল ২ : ৫ : ৩। তিনি কত কুইন্টাল পটাশ সার ক্রয় করেছিলেন?

৬। তিনটি ক্রমিক সমানুপাতীর প্রান্তীয় রাশিদ্বয়ের গুণফল ৩৬। ৩য় রাশি ১২ হলে, ক্রমিক সমানুপাতটি নির্ণয় কর।

৭। ১২ কেজি ডালের দাম ৪৮০ টাকা। এরূপ ২৫ কেজি ডালের দাম কত হবে?

৮। ৫টি বইয়ের দাম ১২৬·২৫ টাকা। ৪২৯·২৫ টাকায় কয়টি বই পাওয়া যাবে?

৯। ১৮ জন লোক একটি কাজ ২০ দিনে করতে পারে। একই হারে করলে ঐ কাজটি করতে ২৭ জন লোকের কতদিন লাগবে?

১০। একটি ছাত্রাবাসে ৫০ জন ছাত্রের ২০ দিনের খাদ্য মজুত আছে। ৩ দিন পর ১৬ জন ছাত্র অন্য জায়গায় চলে গেল। বাকি খাদ্যে অবশিষ্ট ছাত্রদের কতদিন চলবে?

১১। একটি কারখানায় ৩৬৫ দিনে ১৪,৬০০টি বাল্ব তৈরি হয়। ১৪০ দিনে ঐ কারখানায় কতগুলো বাল্ব তৈরি হবে?

১২। জামাল সাহেব ও সমরেশ বাবুর মাসিক বেতনের অনুপাত ৬ : ৫। তাঁদের দুই জনের মাসিক বেতন একত্রে ১১,০০০ টাকা। এক বছর পরে জামাল সাহেব ও সমরেশ বাবুর মাসিক বেতন যথাক্রমে ১০০ টাকা ও ৭৫ টাকা বেড়ে গেল। এক বছর পরে তাঁদের মাসিক বেতনের অনুপাত কত?

১৩। একটি পাত্রের মিশ্রণে পাউডার দুধ ও পানির ওজনের অনুপাত ৫ : ৬ । অপর একটি পাত্রের মিশ্রণে পানি ও চিনির ওজনের অনুপাত ৭ : ৪। ঐ দুইটি পাত্রের মিশ্রণ একত্র করলে দুধ, পানি ও চিনির ওজনের অনুপাত কত হবে?

১৪। ৩০ লিটার মিশ্রণে এসিড ও পানির ওজনের অনুপাত ৭ : ৩। ঐ মিশ্রণে কী পরিমাণ পানি মিশ্রিত করলে এসিড ও পানির ওজনের অনুপাত ৩ : ৭ হবে?

২·১১। সমানুপাতিক ভাগ

মনে করি, ৩০ মিটার লম্বা একটি ফিতাকে ৭ ঃ ৩ অনুপাতে দুইটি টুকরা করতে হবে।

ফিতাকে ৭ ঃ ৩ অনুপাতে বিভক্ত করার অর্থ হল ফিতাকে সমান (৭ + ৩) বা ১০ ভাগ করে যথাক্রমে ৭ ভাগ ও ৩ ভাগ নেওয়া। অর্থাৎ, প্রথম টুকরার জন্য ফিতার $\frac{৭}{১০}$ অংশ নেওয়া।

$\therefore$ ১ম টুকরার দৈর্ঘ্য = $\left(৩০ * \frac{৭}{১০}\right)$ মিটার = ২১ মিটার।

এবং ২য় টুকরার দৈর্ঘ্য = $\left(৩০ * \frac{৩}{১০}\right)$ মিটার = ৯ মিটার।

সুতরাং, একটি অংশের পরিমাণ = প্রদত্ত রাশি * $\frac{\text{ঐ অংশের আনুপাতিক সংখ্যা}}{\text{অনুপাতের সংখ্যাগুলোর যোগফল}}$

উপরের পদ্ধতিতে একটি রাশিকে বিভক্ত করাকে সমানুপাতিক ভাগ বলা হয়।

কোনো একটি প্রদত্ত রাশিকে একাধিক নির্দিষ্ট সংখ্যার অনুপাতে ভাগ করাকে সমানুপাতিক ভাগ বলা হয়।

উদাহরণ ১১। ৮,০০০·০০ টাকা ক, খ, গ এর মধ্যে ৭ ঃ ৫ ঃ ৪ অনুপাতে ভাগ করে দেওয়া হল। ক, খ, গ এরা প্রত্যেকে কত টাকা পেয়েছে?

সমাধান : এখানে অনুপাতের সংখ্যাগুলোর যোগফল = ৭ + ৫ + ৪ = ১৬

$\therefore$ ক পাবে $\left(৮০০০ * \frac{৭}{১৬}\right)$ টাকা = ৩৫০০ টাকা

খ পাবে $\left(৮০০০ * \frac{৫}{১৬}\right)$ টাকা = ২৫০০ টাকা

গ পাবে $\left(৮০০০ * \frac{৪}{১৬}\right)$ টাকা = ২০০০ টাকা

উত্তর : ৩,৫০০·০০ টাকা; ২,৫০০·০০ টাকা; ২,০০০·০০ টাকা।

২·১২। অংশীদারী কারবার

দুই বা ততোধিক ব্যক্তি একত্রে একটি কারবারের মালিক হলে, ঐ কারবারকে অংশীদারী কারবার বলা হয়। ঐ ব্যক্তিদের প্রত্যেকে কারবারের অংশীদার। নির্দিষ্ট চুক্তি অনুযায়ী অংশীদারগণ কারবারে মূলধন বিনিয়োগ করেন এবং কারবার পরিচালনা করেন।

অংশীদারগণ আলোচনার মাধ্যমে কারবারের লাভ বা ক্ষতির অংশ বণ্টনের চুক্তি করেন। চুক্তিতে লাভ–ক্ষতি বণ্টন সম্পর্কে কিছু বলা না থাকলে কারবারের লাভ তাঁদের মূলধনের অনুপাতে বণ্টন করা হয়। তদ্রুপ কারবারের ক্ষতিও মূলধনের অনুপাতে অংশীদারগণ বহন করেন। যেমন ,

একটি কারবারে ক ও খ যথাক্রমে ২০০০ টাকা ও ৩০০০ টাকা বিনিয়োগ করলে ক ও খ এর প্রাপ্ত লাভ বা ক্ষতির অনুপাত ২০০০ ঃ ৩০০০ বা ২ ঃ ৩।

উদাহরণ ১২। একটি অংশীদারী কারবারে জামাল সাহেব, আজমল সাহেব ও সুরেশ বাবু এক বছরের জন্য যথাক্রমে ৬৪০০ টাকা, ৮০০০ টাকা ও ৯৬০০ টাকা বিনিয়োগ করলেন। ঐ কারবারে এক বছরে ৩৬০০ টাকা লাভ হলে, কে কত টাকা লাভ পাবেন?

সমাধান : জামাল সাহেবের মূলধন ঃ আজমল সাহেবের মূলধন ঃ সুরেশ বাবুর মূলধন

= ৬৪০০ ঃ ৮০০০ ঃ ৯৬০০

= ৪ ঃ ৫ ঃ ৬

∴ অনুপাতের সংখ্যাগুলোর যোগফল = ৪ + ৫ + ৬ = ১৫

সুতরাং, জামাল সাহেবের লভ্যাংশ = $\left(৩৬০০ * \frac{৪}{১৫}\right)$ টাকা = ৯৬০ টাকা

আজমল সাহেবের লভ্যাংশ = $\left(৩৬০০ * \frac{৫}{১৫}\right)$ টাকা = ১২০০ টাকা

সুরেশ বাবুর লভ্যাংশ = $\left(৩৬০০ * \frac{৬}{১৫}\right)$ টাকা = ১৪৪০ টাকা

উত্তর : ৯৬০·০০ টাকা; ১,২০০·০০ টাকা; ১,৪৪০·০০ টাকা।

উদাহরণ ১৩। রনি ও জনি যথাক্রমে ৫০০০ টাকা ও ৬০০০ টাকা মূলধন নিয়ে একত্রে কারবার শুরু করল। ৬ মাস পরে পপি ৮০০০ টাকা মূলধন নিয়ে ঐ কারবারে একজন অংশীদার হল। প্রথম থেকে এক বছর পরে ঐ কারবারে ৩৬০০ টাকা লাভ হলে, কে কত লাভ পাবে ?

সমাধান : এখানে রনি, জনি ও পপির মূলধন ভিন্ন ভিন্ন সময়ের জন্য কারবারে খাটানো হয়েছে। সুতরাং একটি নির্দিষ্ট সময়ের জন্য প্রত্যেকের সমতুল্য মূলধন হিসাব করে ঐ অনুপাতে লাভ বণ্টন করতে হবে। রনি ৫০০০ টাকা ১২ মাস খাটিয়ে যে লাভ পাবে, (৫০০০*১২) টাকা ১ মাস খাটিয়ে ঐ লাভ পাবে।

∴ রনির ১ মাসের জন্য সমতুল্য মূলধন (৫০০০ * ১২) টাকা

তদ্রূপ, জনির ১ মাসের সমতুল্য মূলধন (৬০০০ * ১২) টাকা

যেহেতু পপির টাকা ৬ মাসের জন্য কারবারে খাটানো হয়েছে, অতএব পপির ১ মাসের জন্য সমতুল্য মূলধন (৮০০০ * ৬) টাকা

∴ রনির সমতুল্য মূলধন ঃ জনির সমতুল্য মূলধন ঃ পপির সমতুল্য মূলধন

= ৫০০০ * ১২ ঃ ৬০০০ * ১২ ঃ ৮০০০ * ৬

= ১০ ঃ ১২ ঃ ৮ [(১০০০ * ৬) দ্বারা ভাগ করে]

= ৫ ঃ ৬ ঃ ৪

∴ অনুপাতের সংখ্যাগুলোর যোগফল = ৫ + ৬ + ৪ = ১৫

সুতরাং, রনির লভ্যাংশ = $\left(৩৬০০ * \frac{৫}{১৫}\right)$ টাকা = ১২০০ টাকা

জনির লভ্যাংশ = $\left(৩৬০০ * \frac{৬}{১৫}\right)$ টাকা = ১৪৪০ টাকা

পপির লভ্যাংশ = $\left(৩৬০০ * \frac{৪}{১৫}\right)$ টাকা = ৯৬০ টাকা

উত্তর : ১,২০০·০০ টাকা; ১,৪৪০·০০ টাকা; ৯৬০·০০ টাকা।

প্রশ্নমালা ২·৩

১। ক ঃ খ = ৪ ঃ ৫, খ ঃ গ = ৭ ঃ ১১ হলে, ক ঃ খঃ গ এর মান নির্ণয় কর।

২। এক ধরনের ইস্পাতে লোহা ও কার্বনের অনুপাত ৪৯ ঃ ১। ঐ ধরনের ২০০ কেজি ইস্পাতে কত কেজি কার্বন আছে ?

৩। তামা ও লোহা মিশ্রিত একটি গোলকের ওজন ১৫৬ গ্রাম। ঐ গোলকে তামা ও লোহার ওজনের অনুপাত ৭ ঃ ৬। গোলকটিতে কত গ্রাম লোহা মেশালে তামা ও লোহার ওজনের অনুপাত ৬ ঃ ৭ হবে ?

৪। একজন কৃষক তাঁর জমিতে ৯ ঃ ২ অনুপাতে জৈব সার ও রাসায়নিক সার ব্যবহার করেন। এজন্য প্রতি হেক্টর জমির জন্য তাঁর ২২ বস্তা মিশ্র–সারের প্রয়োজন হয়। ৮ হেক্টর জমির জন্য প্রত্যেক রকমের কত বস্তা সার প্রয়োজন হবে ?

৫। কোনো মিশ্রণে এসিড ও পানির ওজনের অনুপাত ৮৮·৯ ঃ ১১·১ হল। ১০০ কিলোগ্রাম মিশ্রণে এসিড ও পানির পরিমাণ কত ?

৬। ২১৬০ টাকা জাহানারা, আয়েশা ও মিনতির মধ্যে ৩ ঃ ৭ ঃ ১৪ অনুপাতে ভাগ করে দিলে কে কত টাকা পাবে ?

৭। তিনজন বালকের মধ্যে ৫৭০ টাকা তাদের বয়সের অনুপাতে ভাগ করে দেওয়া হল। তাদের বয়স যথাক্রমে ১০, ১৩, ১৫ বছর। বালকদের প্রত্যেকে কত টাকা করে পাবে ?

৮। কিছু টাকা অমল, কাদের ও রোড্রিক্স এর মধ্যে ৭ ঃ ৫ ঃ ৪ অনুপাতে ভাগ করে দেওয়া হল। এতে অমল ৩৫০ টাকা পেলে, মোট টাকার পরিমাণ নির্ণয় কর।

৯। কোনো বিদ্যালয়ে ১৩২ জন পরীক্ষার্থীর মধ্যে কৃতকার্য ও অকৃতকার্য পরীক্ষার্থীর অনুপাত ৯ ঃ ২। যদি আরও ৪ জন পরীক্ষার্থী কৃতকার্য হয়, তবে কৃতকার্য ও অকৃতকার্য পরীক্ষার্থীর অনুপাত কত ?

১০। আতিক সাহেবের মাসিক বেতন ৫৬০০·০০ টাকা। তিনি মাসে ৫০০ টাকা সঞ্চয় করেন। বাকি টাকা ৫ ঃ ১১ ঃ ১ অনুপাতে বাড়ি ভাড়া, সংসার খরচ ও ছেলে–মেয়েদের শিক্ষার জন্য খরচ করেন। ছেলে–মেয়েদের শিক্ষার জন্য তাঁর মাসিক খরচ কত ?

১১। পনির ও মনিরের আয়ের অনুপাত ৫ ঃ ৪। মনির ও তপনের আয়ের অনুপাত ৩ ঃ ৪। পনিরের আয় ১২০ টাকা হলে, তপনের আয় কত ?

১২। দুই বন্ধু নিতাই ও তামিম যথাক্রমে ১৫০০ টাকা ও ২৫০০ টাকা মূলধন নিয়ে কারবার শুরু করে। এক বছরে কারবারে ৮৪০ টাকা লাভ হলে, নিতাই ও তামিমের লাভের পরিমাণ কত ?

১৩। আনোয়ার, উত্তম ও জালাল যথাক্রমে ৫০০০ টাকা, ৬০০০ টাকা ও ৫৫০০ টাকা মূলধন নিয়ে একটি কারবার শুরু করল। এক বছর পরে ২৪৭৫ টাকা লাভ হলে, লাভের কে কত পাবে ?

১৪। ইসহাক, রমেশ ও জামান যথাক্রমে ১৫০০ টাকা, ১২০০ টাকা ও ১৭০০ টাকা মূলধন নিয়ে কাপড়ের কারবার শুরু করল। বছরের শেষে ২২০ টাকা লোকসান হল। কে কত টাকা লোকসান বহন করবে ?

১৫। আশিক ও জাফর ২৫০০০ টাকায় একটি টেলিভিশন কিনে ২৬২৫০ টাকায় বিক্রয় করল। টেলিভিশনটি ক্রয় করার সময় আশিক জাফরের $১\frac{১}{২}$ গুণ টাকা দিয়ে থাকলে, আশিক লাভ থেকে কত টাকা পাবে?

১৬। বছরের প্রথমে জমির ও কাসেম একটি অংশীদারী কারবারে যথাক্রমে ১২০০০ টাকা ও ১৫০০০ টাকা মূলধন বিনিয়োগ করে। ৫ মাস পর জমির আরও ২০০০ টাকা মূলধন বিনিয়োগ করে। বছরের শেষে ৬৭৬০ টাকা লাভ হলে, জমির ও কাসেম প্রত্যেকে কত লাভ পাবে ?

১৭। তিন জন শ্রমিক জাহেদ, মকবুল ও রশীদ যথাক্রমে ৬৫০০ টাকা, ৯১০০ টাকা ও ৫২০০ টাকা মূলধন নিয়ে একটি লেদ কারখানা স্থাপন করল। বছরের শেষে ঐ লেদ কারখানায় ৫২০০ টাকা লাভ হল। তিন জনের প্রত্যেকে লাভ কী পরিমাণে পাবে ?

১৮। লিলি, মলি, পিংকিকে ৩১৫ টাকা ভাগ করে দেওয়া হল। এতে লিলির টাকা মলির টাকার $\frac{৩}{৫}$ এবং মলির টাকা পিংকির টাকার ২ গুণ। লিলি, মলি, পিংকির টাকার পরিমাণ নির্ণয় কর।

১৯। তামা, দস্তা ও রূপা মিশিয়ে একরকমের গয়না তৈরি করা হল। ঐ গয়নায় তামা ও দস্তার অনুপাত ১ ঃ ২, দস্তা ও রূপার অনুপাত ৩ ঃ ৫। ৩৮ গ্রাম ওজনের গয়নায় কত গ্রাম দস্তা আছে ?

২০। সুমন ও জামাল যথাক্রমে ৫০০০ টাকা ও ৪০০০ টাকা মূলধন নিয়ে একটি কারবার শুরু করল। ৩ মাস পরে সুমন আরও ১০০০ টাকা দিল এবং দিলীপ ৭০০০ টাকা মূলধন নিয়ে কারবারের নতুন অংশীদার হল। এক বছরে ৩৬০০ টাকা লাভ হলে, লাভের টাকা কে কত পাবে ?

২১। তিনটি সমান মাপের গ্লাস শরবতে পূর্ণ আছে। ঐ শরবতে পানি ও সিরাপের অনুপাত যথাক্রমে প্রথম গ্লাসে ৩ ঃ ১, দ্বিতীয় গ্লাসে ৫ ঃ ৩ এবং তৃতীয় গ্লাসে ৯ ঃ ৭। ঐ তিনটি গ্লাসের শরবত একটি বড় পাত্রে ঢালা হল। নতুন পাত্রে পানি ও সিরাপের অনুপাত কত হবে ?

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। অনুপাত কী ?

ক. একটি পূর্ণসংখ্যা
খ. একটি ভগ্নাংশ
গ. একটি মৌলিক সংখ্যা
ঘ. একটি জোড় সংখ্যা

২। ৪ ঃ ৯ এর দ্বিভাজিত অনুপাত কোনটি ?

ক. ২ ঃ ৩
খ. ৪ ঃ ৯
গ. ৯ ঃ ৪
ঘ. ১৬ ঃ ৮১

৩। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :

i. ৫ ঃ ২ হল গুরু অনুপাত
ii. ক্রমিক সমানুপাতের তিনটি রাশি একজাতীয় নয়
iii. ক ঃ খ = ২ ঃ ৩ এবং খ ঃ গ = ৩ ঃ ৪ হলে, ক ঃ খ ঃ গ = ২ ঃ ৩ ঃ ৪

ওপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii
খ. ii ও iii
গ. i ও iii
ঘ. i, ii ও iii

সিয়াম ও ফাতেমা একটি অংশীদারী কারবার শুরু করল এবং ২৫৬ টাকা লাভ হল। ফাতেমার প্রাপ্ত লাভ ১৬০ টাকা।

ওপরের তথ্যের আলোকে ৪ - ৬ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

৪। নিচের কোনটি সিয়াম ও ফাতেমার লাভের অনুপাত ?

ক. ৮ ঃ ৫
খ. ৩ ঃ ৮
গ. ৩ ঃ ৫
ঘ. ৫ ঃ ৩

৫। সিয়ামের মূলধন ৩০০০ টাকা হলে, ফাতেমার মূলধন কত টাকা ?

ক. ১১০০০
খ. ৮০০০
গ. ৫০০০
ঘ. ৩০০০

৬। ফাতেমার প্রাপ্ত লাভ ১৫৬ টাকা হলে, সিয়াম ও ফাতেমার প্রাপ্ত লাভের অনুপাত কোনটি ?

ক. ৩ ঃ ৫
খ. ২৫ ঃ ৬৪
গ. ৬৪ ঃ ৩৯
ঘ. ২৫ ঃ ৩৯

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। একটি লাল ও একটি সবুজ বলের ওজন যথাক্রমে ৭২ গ্রাম ও ৯৬ গ্রাম। একটি সবুজ ও একটি কালো বলের ওজনের অনুপাত লাল ও সবুজ বলের ওজনের অনুপাতের সমান।

ক. লাল ও সবুজ বলের ওজনের অনুপাত নির্ণয় কর ?

খ. কালো বলের ওজন নির্ণয় কর।

গ. লাল, সবুজ ও কালো বলের ক্রয়মূল্যের অনুপাত এদের ওজনের অনুপাতের সমান হলে, লাল ও সবুজ বলের ক্রয়মূল্য নির্ণয় কর। (এখানে, ১টি লাল, ১টি সবুজ ও ১টি কালো বলের ক্রয়মূল্য একত্রে ২৯৬ টাকা।)

২। ব্যবসায়ের উদ্দেশ্যে মুস্তাফিজ ও আয়েশা যথাক্রমে ৪ ঘণ্টায় ৫০ কি.মি. ও ৩ $\frac{১}{২}$ ঘণ্টায় ৫২ $\frac{১}{২}$ কি.মি. পথ অতিক্রম করে ঢাকায় পৌঁছে। ব্যবসায় তারা ২২০০০ টাকা বিনিয়োগ করে ৫% লাভ পেল।

ক. মুস্তাফিজের গতিবেগ নির্ণয় কর।

খ. মুস্তাফিজ ও আয়েশার গতিবেগের অনুপাত বের কর।

গ. মুস্তাফিজ ও আয়েশার লাভ তাদের গতিবেগের অনুপাতের সমান হলে, তাদের লাভের পরিমাণ নির্ণয় কর।

৩। আরেফিন ও আমেনার মাসিক বেতনের অনুপাত ৪ $\frac{১}{২}$ ঃ ৪ $\frac{১}{৫}$। তাদের দুই জনের মাসিক বেতন একত্রে ২৯০০০ টাকা। এক বছর পর আরেফিন ও আমেনার বেতন যথাক্রমে ৫৭৫·৭৫ টাকা ও ৪৫০·৫০ টাকা বৃদ্ধি পায়।

ক. আরেফিন ও আমেনার বেতনের অনুপাত a ঃ b আকারে প্রকাশ কর। যেখানে, a ও b পূর্ণসংখ্যা।

খ. আরেফিন ও আমেনার বেতন নির্ণয় কর।

গ. এক বছর পর আরেফিন ও আমেনার বেতনের অনুপাত নির্ণয় কর।

তৃতীয় অধ্যায়

ঐকিক নিয়ম

৩·১। পূর্ব পাঠের পুনরালোচনা

আমরা জানি, ঐকিক নিয়মটি হল কতকগুলো জিনিসের দাম, ওজন, পরিমাণ ইত্যাদি থেকে একটি জিনিসের দাম, ওজন, পরিমাণ ইত্যাদি প্রথমে বের করা। এরপর ১টি জিনিসের দাম, ওজন, পরিমাণ ইত্যাদি থেকে নির্দিষ্ট সংখ্যক একই জাতীয় জিনিসের দাম, ওজন, পরিমাণ ইত্যাদি নির্ণয় করা।

মনে করি, ১০টি কমলালেবুর দাম ৪৫ টাকা। তাহলে, আমরা সহজেই বলতে পারি ১টি কমলালেবুর দাম (৪৫ ÷ ১০) হবে। অর্থাৎ, ১টি কমলালেবুর দাম $\frac{৪৫}{১০}$ টাকা।

এখন ১টি কমলালেবুর দাম থেকে যে-কোন সংখ্যক কমলালেবুর দাম নির্ণয় করা যায়। যেমন ,

৮টি কমলালেবুর দাম = $\frac{\overset{৯}{\cancel{৪৫}} * \overset{৪}{\cancel{৮}}}{\underset{\underset{১}{\cancel{২}}}{\cancel{১০}}}$ টাকা = ৩৬ টাকা।

সমস্যা সমাধানের নিয়ম :

(১) কমলালেবুর সংখ্যা কমলে দামও কমে। এজন্য ১০টি কমলালেবুর দামকে ১০ দ্বারা ভাগ করে ১টি কমলালেবুর দাম পাওয়া গেছে।

(২) কমলালেবুর সংখ্যা বাড়লে দামও বাড়ে। ঐ কারণে ১টি কমলালেবুর দামকে ৮ দ্বারা গুণ করা হয়েছে।

আবার মনে করি, ১০ জন লোক একটি কাজ ৭ দিনে করতে পারে। এক্ষেত্রে আমরা বলতে পারি, ঐ কাজটি ১ জন লোককে করতে হলে ১০ গুণ সময় লাগবে। অর্থাৎ, ১ জন লোক ঐ কাজ করতে পারে ৭ * ১০ দিনে। এখন ঐ কাজ ৫ জন লোকে করলে তাদের নির্ণেয় সময় ১ জন লোকের সময় থেকে কম হবে।

∴ ৫ জন লোকের কাজটি করতে লাগে $\frac{৭ * \overset{২}{\cancel{১০}}}{\underset{১}{\cancel{৫}}}$ দিন বা, ১৪ দিন।

সমস্যা সমাধানের নিয়ম :

(১) লোকের সংখ্যা কমলে সময় বেশি লাগে। এজন্য ১০ জনের কাজের সময়কে ১০ দ্বারা গুণ করে একজন লোকের কাজের সময় পাওয়া গেছে।

(২) আবার লোকের সংখ্যা বাড়লে কাজের সময় কমে। সুতরাং একজনের কাজের সময়কে ৫ দ্বারা ভাগ করা হয়েছে।

উদাহরণ ১। ৫০ কেজি চিনির দাম ১৪৭৫ টাকা হলে, ৬৩ কেজি চিনির দাম কত ?

সমাধান : ৫০ কেজি চিনির দাম ১৪৭৫ টাকা

∴ ১ ,, ,, ,, $\frac{১৪৭৫}{৫০}$ টাকা

∴ ৬৩ ,, ,, ,, $\frac{\overset{\overset{৫৯}{\cancel{২৯৫}}}{\cancel{১৪৭৫}} * ৬৩}{\underset{\underset{২}{\cancel{১০}}}{\cancel{৫০}}}$ টাকা

বা, $\frac{৩৭১৭}{২}$ টাকা বা, ১৮৫৮·৫০ টাকা

উত্তর : ১৮৫৮·৫০ টাকা।

উদাহরণ ২। ২০ জন শ্রমিক দৈনিক ৮ ঘণ্টা পরিশ্রম করে ১৫ দিনে একটি জমির ফসল কাটতে পারে। ২৫ জন শ্রমিক দৈনিক ৬ ঘণ্টা পরিশ্রম করে ঐ জমির ফসল কত দিনে কাটতে পারবে?

সমাধান : শ্রমিকেরা ১৫ দিনে পরিশ্রম করে মোট (৮ * ১৫) ঘণ্টা বা, ১২০ ঘণ্টা।

অর্থাৎ, ২০ জন শ্রমিক ফসল কাটে ১২০ ঘণ্টায়

∴ ১ ,, ,, ,, ,, ১২০ * ২০ ঘণ্টায়

∴ ২৫ ,, ,, ,, ,, $\frac{\overset{২৪}{\cancel{১২০}} * \overset{৪}{\cancel{২০}}}{\underset{\underset{১}{\cancel{৫}}}{\cancel{২৫}}}$ ঘণ্টায় বা, ৯৬ ঘণ্টায়

যেহেতু শ্রমিকেরা দৈনিক ৬ ঘণ্টা পরিশ্রম করে, তাই তারা জমির ফসল কাটবে (৯৬ ÷ ৬) দিনে বা, ১৬ দিনে।

উত্তর : ১৬ দিনে।

মন্তব্য : আমরা ধরে নিয়েছি যে, প্রত্যেক শ্রমিকের কাজ করার ক্ষমতা সমান।

প্রশ্নমালা ৩·১

১। ১০৫ কেজি ডালের দাম ৪৩৩১·২৫ টাকা হলে, ৭০ কেজি ডালের দাম কত?

২। ২৭৫ টি রূপার মুদ্রার ওজন ২ $\frac{৩}{৪}$ কেজি হলে, ৩২৫ টি রূপার মুদ্রার ওজন কত?

৩। ৭ কেজি কয়লায় ৫২ $\frac{১}{২}$ কেজি ওজনের পানি বাষ্পায়িত হয়। ৯১৫ কেজি ওজনের পানি বাষ্পায়িত করতে কত কেজি কয়লার প্রয়োজন হবে ?

৪। এক জন দোকানদার প্রতি কেজি ১৮·৫০ টাকা দরে ৮০ কেজি এবং প্রতি কেজি ১৫·০০ টাকা দরে ১০০ কেজি চাল ক্রয় করলেন। ঐ দুই রকমের চাল বিক্রয় করায় তাঁর ১৭০·০০ টাকা লাভ হল। প্রতি কেজি চাল তিনি গড়ে কত টাকা দরে বিক্রয় করলেন ?

৫। এক ব্যক্তি ৭০০০ টাকা মূলধন বিনিয়োগ করে ২৫২ টাকা আয় করেন। তিনি ১০৫০০ টাকা মূলধন বিনিয়োগ করলে কত টাকা আয় করবেন ?

৬। আরিফ সাহেব কিছু টাকা ব্যাংকে জমা রাখলেন। এক বছর পরে তিনি ৫৮৫ টাকা মুনাফা পেলেন। ব্যাংক থেকে ১০০ টাকায় ১ বছরে ৬·৫০ টাকা মুনাফা পেলে, তিনি কত টাকা জমা রেখেছিলেন ?

৭। ৫৫ জন লোক একটি কাজ ১৫ দিনে করতে পারে। ঐ কাজটি ২৫ দিনে শেষ করতে হলে কত জন লোকের প্রয়োজন ?

৮। ৩ কুইন্টাল চালে ৯ জন লোকের ৩০ দিন চলে। ঐ চালে ২৫ জন লোকের কত দিন চলবে?

৯। ৫০০০ ইট তৈরি করতে ৪২ জন শ্রমিকের ৩০ দিন লাগে। ঐ ইট তৈরি করতে ১৮ জন শ্রমিকের কত দিন লাগবে ?

১০। ৫টি রেডিও এবং ৪টি টেলিভিশনের দাম একত্রে ৮৯,৫০০ টাকা। ১টি টেলিভিশনের দাম ১৯,৫০০ টাকা হলে, ১৫টি রেডিও এর দাম কত?

১১। একটি ছাত্রাবাসে ৩০ জন ছাত্রের ১৫ দিনের খাদ্য মজুত আছে। কয়েকজন নতুন ছাত্র ছাত্রাবাসে ভর্তি হওয়ায় ঐ খাদ্য ১০ দিনে শেষ হয়ে গেল। কত জন নতুন ছাত্র ভর্তি হয়েছে ?

১২। ২৫ জন লোক দৈনিক ৮ ঘণ্টা পরিশ্রম করে ১৭ দিনে একটি খাল খনন করতে পারে। ৩৪ জন লোক দৈনিক ৬ ঘণ্টা পরিশ্রম করে ঐ খালটি কত দিনে খনন করতে পারবে ?

১৩। ৪ জন পুরুষ বা ৮ জন স্ত্রীলোক একটি কাজ ১০ দিনে করতে পারে। ২ জন পুরুষ ও ১২ জন স্ত্রীলোক ঐ কাজটি কত দিনে করতে পারবে?

১৪। রফিক দৈনিক ১০ ঘণ্টা করে হেঁটে ১২ দিনে ৪৮০ কিলোমিটার পথ অতিক্রম করে। দৈনিক ৯ ঘণ্টা করে হেঁটে কত দিনে সে ৩৬০ কিলোমিটার পথ অতিক্রম করবে ?

১৫। একজন ঠিকাদার ২০ কিলোমিটার রাস্তা ৪৫ দিনে সম্পন্ন করে দেওয়ার চুক্তি করলেন। ১৫০ জন শ্রমিক নিয়োগ করে তিনি ৩০ দিনে রাস্তার অর্ধেক কাজ শেষ করলেন। নির্দিষ্ট সময়ে রাস্তার কাজ শেষ করতে হলে, তাঁকে অতিরিক্ত কত জন শ্রমিক নিয়োগ করতে হবে ?

১৬। ১৫ জন লোক দৈনিক ৬ ঘণ্টা পরিশ্রম করে একটি কাজ ৮ দিনে শেষ করে। ১০ জন লোক দৈনিক কত ঘণ্টা পরিশ্রম করে ৯ দিনে ঐ কাজটি শেষ করতে পারবে ?

১৭। ৪ জন পুরুষ ও ১০ জন বালক একটি কাজ ১৮ দিনে করতে পারে। ১২ জন পুরুষ ও ৩০ জন বালক ঐ কাজটি কত দিনে করতে পারবে?

৩·২। সময় ও কাজ বিষয়ক সমস্যা

সময় ও কাজ বিষয়ক সমস্যায় দুইটি বা তিনটি ভিন্ন জাতীয় রাশি যুক্ত থাকে। ঐগুলো হল :

(ক) সময়ের পরিমাণ

(খ) কাজের পরিমাণ

(গ) কাজ সম্পাদনকারীর সংখ্যা।

ঐকিক নিয়মে সময় ও কাজ বিষয়ক সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে নিচের বিষয়গুলোর প্রতি লক্ষ রাখতে হবে :

(১) কাজ সম্পাদনকারীর সংখ্যা অপরিবর্তিত রেখে কাজের পরিমাণ বাড়ালে সময়ের পরিমাণ বেশি হয়। আবার কাজের পরিমাণ কমলে সময়ের পরিমাণ কম হয়।

(২) কাজের সময় অপরিবর্তিত রেখে কাজ সম্পাদনকারীর সংখ্যা বাড়ালে কাজের পরিমাণ বেশি হয়। আবার কাজ সম্পাদনকারীর সংখ্যা কমলে কাজের পরিমাণ কম হয়।

(৩) কাজের পরিমাণ অপরিবর্তিত রেখে কাজ সম্পাদনকারীর সংখ্যা বাড়ালে কাজের সময় কমবে। আবার কাজ সম্পাদনকারীর সংখ্যা কমলে সময় বাড়বে।

উদাহরণ ৩। ৫ জন শ্রমিক ৪ দিনে ৮ হেক্টর জমির পাট কাটতে পারে। ৭০ হেক্টর জমির পাট কাটতে ২৫ জন শ্রমিকের কত দিন লাগবে ?

সমাধান : ৫ জন শ্রমিক ৮ হেক্টর জমির পাট কাটতে পারে ৪ দিনে

∴ ১ ,, ,, ৮ ,, ,, ,, ,, ,, ৪ * ৫ ,,

∴ ১ ,, ,, ১ ,, ,, ,, ,, ,, $\frac{৪ * ৫}{৮}$ দিনে

∴ ২৫ ,, ,, ১ ,, ,, ,, ,, ,, $\frac{৪ * ৫}{৮ * ২৫}$ দিনে

∴ ২৫ ,, ,, ৭০ ,, ,, ,, ,, ,, $\frac{\overset{১}{\cancel{৪}} * \overset{১}{\cancel{৫}} * \overset{\overset{৭}{\cancel{১৪}}}{\cancel{৭০}}}{\underset{\underset{১}{\cancel{২}}}{\cancel{৮}} * \underset{\underset{১}{\cancel{৫}}}{\cancel{২৫}}}$ দিনে

বা, ৭ দিনে।

উত্তর : ৭ দিনে।

লক্ষ করি : কয়েকজন লোক একত্রে নির্দিষ্ট সময়ে কাজ করেছে। আমরা ধরে নিয়েছি যে, প্রত্যেকের কাজ করার ক্ষমতা সমান।

দুই বা ততোধিক লোক ভিন্ন ভিন্ন সময়ে একটি নির্দিষ্ট কাজ সম্পন্ন করলে, ঐকিক নিয়মে সমস্যার সমাধান :

উদাহরণ ৪। সফি একটি কাজ ২৪ দিনে করতে পারে। রতন ঐ কাজটি ১২ দিনে করতে পারে। সফি ও রতন একত্রে কাজটি কত দিনে শেষ করতে পারবে ?

সমাধান : সফি ২৪ দিনে করতে পারে সম্পূর্ণ কাজ বা ১ কাজ

∴ ,, ১ ,, ,, ,, কাজের $\frac{১}{২৪}$ অংশ বা, $\frac{১}{২৪}$ কাজ

আবার, রতন ১২ দিনে করতে পারে ১ কাজ

∴ ,, ১ ,, ,, ,, $\frac{১}{১২}$ কাজ

সুতরাং, সফি ও রতন একত্রে ১ দিনে করে $\left(\frac{১}{২৪} + \frac{১}{১২}\right)$ কাজ

বা, $\frac{৩}{২৪}$ কাজ. বা $\frac{১}{৮}$ কাজ

∴ সফি ও রতন একত্রে $\frac{১}{৮}$ কাজ করে ১ দিনে

∴ ,, ,, ,, ১ (সম্পূর্ণ) কাজ করে $\left(১ \div \frac{১}{৮}\right)$ দিনে বা, $\left(১ * \frac{৮}{১}\right)$ দিনে

বা, ৮ দিনে

অর্থাৎ, সফি ও রতন একত্রে ৮ দিনে কাজটি শেষ করতে পারবে।

উত্তর : ৮ দিনে।

উদাহরণ ৫। জাকির ও মনির একটি কাজ যথাক্রমে ২০ ও ৩০ দিনে করতে পারে। জাকির ও মনির একত্রে ৭ দিন কাজ করার পর উভয়ে চলে গেল। আশীষ বাকি কাজ ১০ দিনে শেষ করল। সম্পূর্ণ কাজটি আশীষ কত দিনে করতে পারবে ?

সমাধান : জাকির ২০ দিনে করে ১ কাজ

∴ ,, ১ ,, ,, $\frac{১}{২০}$ কাজ

মনির ৩০ দিনে করে ১ কাজ

∴ ,, ১ দিনে করে $\frac{১}{৩০}$ কাজ

∴ $\frac{১}{২০} + \frac{১}{৩০} = \frac{৫}{৬০} = \frac{১}{১২}$

∴ জাকির ও মনির একত্রে ১ দিনে করে $\frac{১}{১২}$ কাজ

∴ ,, ,, ,, ৭ ,, ,, $\frac{৭}{১২}$ কাজ

বাকি রইল ১ − $\frac{৭}{১২}$ কাজ বা, $\frac{৫}{১২}$ কাজ

অর্থাৎ, আশীষ $\frac{৫}{১২}$ কাজ করে ১০ দিনে

∴ ,, ১ (সম্পূর্ণ) ,, ,, ১০ ÷ $\frac{৫}{১২}$ দিনে

বা ১০ * $\frac{১২}{৫}$ দিনে বা, ২৪ দিনে।

উত্তর : ২৪ দিনে।

৩·৩। সময় ও দূরত্ব বিষয়ক সমস্যা

উদাহরণ ৬। ১২০ মিটার লম্বা একটি ট্রেন ৩৩০ মিটার লম্বা একটি সেতু অতিক্রম করবে। ট্রেনটির গতিবেগ ঘণ্টায় ৩০ কি.মি. হলে, সেতুটি অতিক্রম করতে ট্রেনটির কত সময় লাগবে?

সমাধান : ট্রেনটিকে সেতুর দৈর্ঘ্য ও ট্রেনটির দৈর্ঘ্যের যোগফলের সমান দূরত্ব অতিক্রম করতে হবে।

অর্থাৎ, (৩৩০ + ১২০) মিটার বা ৪৫০ মিটার অতিক্রম করতে হবে।

এখানে, ৩০ কি. মি. = ৩০ * ১০০০ মিটার

এবং ১ ঘণ্টা = ৬০ * ৬০ সেকেন্ড

ট্রেনটি ৩০ * ১০০০ মিটার অতিক্রম করে ৬০ * ৬০ সেকেন্ডে

∴ ,, ১ ,, ,, ,, $\frac{৬০ * ৬০}{৩০ * ১০০০}$ সেকেন্ডে

∴ ,, ৪৫০ ,, ,, ,, $\frac{\overset{২}{\cancel{৬০}} * \overset{৩}{\cancel{৬০}} * \overset{৯}{\cancel{৪৫০}}}{\underset{১}{\cancel{৩০}} * \underset{\underset{১}{\cancel{২০}}}{\cancel{১০০০}}}$ সেকেন্ডে

বা, ৫৪ সেকেন্ডে।

উত্তর : ৫৪ সেকেন্ডে।

ব্যাখ্যা :

১ম চিত্রে দেখানো হয়েছে, ট্রেনটির ইঞ্জিন যখন সেতুটির বামপ্রান্ত স্পর্শ করে তখন সেতুটি অতিক্রমের কাজ শুরু হল। দ্বিতীয় চিত্রে দেখানো হয়েছে, ট্রেনটির শেষপ্রান্ত যখন সেতুটির ডানপ্রান্ত ছেড়ে যাচ্ছে তখন সেতুটি অতিক্রমের কাজ শেষ হয়। তাহলে, দেখা যাচ্ছে সেতুটি অতিক্রম করতে হলে ট্রেনটিকে (সেতুর দৈর্ঘ্য + ট্রেনের দৈর্ঘ্য) এর সমান দূরত্ব অতিক্রম করতে হবে।

উদাহরণ ৭। দুইটি স্থান 'ক' ও 'খ' এর দূরত্ব ৩৭$\frac{১}{২}$ কি. মি.। আশীষ 'ক' থেকে রওনা হওয়ার ৩ ঘণ্টা পর তার বন্ধু রহমান একই স্থান থেকে মোটর সাইকেলে রওনা হল। আশীষ ও রহমানের গতিবেগ ঘণ্টায় যথাক্রমে ১০কি. মি. ও ৫০ কি. মি. হলে, দুই বন্ধু কোথায় ও কখন মিলিত হবে?

সমাধান : আশীষের ১ ঘণ্টায় অতিক্রান্ত দূরত্ব ১০ কি. মি.

∴ " ৩ " " " (১০* ৩) কি. মি. বা, ৩০ কি. মি.

সুতরাং রহমানের যাত্রা শুরুর আগে দুই বন্ধুর দূরত্বের ব্যবধান = ৩০ কি. মি.

১ ঘণ্টায় রহমান ও আশীষের গতিবেগের পার্থক্য (৫০ – ১০) কি. মি. বা, ৪০ কি. মি.

অর্থাৎ, রহমান ও আশীষের দূরত্বের ব্যবধান ৪০ কি. মি. কমে ১ ঘণ্টায়

∴ ,, ,, ,, ,, ১ ,, ,, $\frac{১}{৪০}$,,

∴ ,, ,, ,, ,, ৩০ ,, ,, $\frac{১ * ৩০}{৪০}$,,

বা, $\frac{৩}{৪}$ ঘণ্টায়

সুতরাং রহমানের যাত্রা শুরুর $\frac{৩}{৪}$ ঘণ্টা পরে তারা পরস্পর মিলিত হবে।

রহমান $\frac{৩}{৪}$ ঘণ্টায় যেতে পারে $\frac{\overset{২৫}{\cancel{৫০}} * ৩}{\underset{২}{\cancel{৪}}}$ কি.মি. বা, ৩৭$\frac{১}{২}$ কি.মি.

∴ ক স্থান থেকে ৩৭$\frac{১}{২}$ কি. মি. দূরে অর্থাৎ খ স্থানে এরা মিলিত হবে।

উত্তর : রহমানের যাত্রা শুরুর $\frac{৩}{৪}$ ঘণ্টা বা ৪৫ মিনিট পরে 'খ' স্থানে উভয়ে মিলিত হবে।

৩·৪। নল ও চৌবাচ্চা বিষয়ক সমস্যা

চৌবাচ্চা বা ঐ জাতীয় পাত্র পানি বা তরল পদার্থ দ্বারা ভর্তি করার জন্য সাধারণত নল ব্যবহার করা হয়। আবার পানি বা তরল পদার্থ বের করার জন্যও নল ব্যবহার করা হয়। চৌবাচ্চা বা ঐ জাতীয় পাত্রে ছিদ্র থাকলেও পানি বা তরল পদার্থ বেরিয়ে যায়।

উদাহরণ ৮। একটি পানির ট্যাঙ্কে তিনটি নল আছে। প্রথম ও দ্বিতীয় নল দ্বারা ট্যাঙ্কটি যথাক্রমে ২০ ও ৩০ মিনিটে পূর্ণ হয়। তৃতীয় নল দ্বারা পূর্ণ ট্যাঙ্কটি ৬০ মিনিটে খালি হয়। তিনটি নল এক সঙ্গে খুলে দিলে খালি ট্যাঙ্কটি কত মিনিটে পূর্ণ হবে?

সমাধান : প্রথম নল দ্বারা ২০ মিনিটে পূর্ণ হয় ১ (সম্পূর্ণ) ট্যাঙ্ক

∴ " " " ১ " " " $\frac{১}{২০}$ "

দ্বিতীয় নল দ্বারা ৩০ মিনিটে পূর্ণ হয় ১ (সম্পূর্ণ) ট্যাঙ্ক

∴ " " " ১ " " " $\frac{১}{৩০}$ "

তৃতীয় নল দ্বারা ৬০ মিনিটে খালি হয় ১ (সম্পূর্ণ) ট্যাঙ্ক

∴ " " " ১ " " " $\frac{১}{৬০}$ "

∴ তিনটি নল একসঙ্গে খুলে দিলে ১ মিনিটে পূর্ণ হয় $\left(\frac{১}{২০}+\frac{১}{৩০}-\frac{১}{৬০}\right)$ ট্যাঙ্ক।

এখন $\frac{১}{২০}+\frac{১}{৩০}-\frac{১}{৬০}=\frac{৩+২-১}{৬০}=\frac{৪}{৬০}=\frac{১}{১৫}$

সুতরাং তিনটি নল দ্বারা $\frac{১}{১৫}$ ট্যাঙ্ক পূর্ণ হয় ১ মিনিটে

∴ ,, ,, ,, ১ ,, ,, ,, $\left(১\div\frac{১}{১৫}\right)$ মিনিটে বা, ১৫ মিনিটে।

উত্তর : ১৫ মিনিট।

৩·৫। নৌকা ও স্রোত বিষয়ক সমস্যা

স্থির পানিতে নৌকার গতিবেগ হল নৌকার প্রকৃত গতিবেগ। স্রোতস্বিনী নদীর স্রোতের অনুকূলে বা প্রতিকূলে নৌকা যে গতিবেগে চলে, তাকে নৌকার কার্যকরী গতিবেগ বলা হয়।

স্রোতের অনুকূলে নৌকার কার্যকরী গতিবেগ = নৌকার প্রকৃত গতিবেগ + স্রোতের গতিবেগ।
স্রোতের প্রতিকূলে নৌকার কার্যকরী গতিবেগ = নৌকার প্রকৃত গতিবেগ – স্রোতের গতিবেগ।

স্রোতস্বিনী নদীতে নৌকা এর কার্যকরী গতিবেগে চলে। এক্ষেত্রে নৌকার প্রকৃত গতিবেগ > স্রোতের গতিবেগ।

উদাহরণ ৯। স্থির পানিতে একটি নৌকার গতিবেগ ঘণ্টায় ৭ কি.মি.। ঐরূপ নৌকাটির স্রোতের অনুকূলে ৩৩ কি.মি. পথ যেতে ৩ ঘণ্টা সময় লেগেছে। ফিরে আসার সময় নৌকাটির কত ঘণ্টা সময় লাগবে?

সমাধান : নৌকাটি স্রোতের অনুকূলে ৩ ঘণ্টায় যায় ৩৩ কি.মি.

∴ " " " ১ " " $\frac{৩৩}{৩}$ কি. মি. বা, ১১ কি.মি.

অর্থাৎ, ঘণ্টায় নৌকার প্রকৃত গতিবেগ + ঘণ্টায় স্রোতের গতিবেগ = ঘণ্টায় ১১ কি. মি.
বা, ঘণ্টায় ৭ কি.মি. + ঘণ্টায় স্রোতের গতিবেগ = ঘণ্টায় ১১ কি.মি.
স্রোতের গতিবেগ ঘণ্টায় (১১ – ৭) কি.মি. বা, ঘণ্টায় ৪ কি.মি.
ফিরে আসার সময় ঘণ্টায় নৌকার কার্যকরী গতিবেগ
= ঘণ্টায় নৌকার প্রকৃত গতিবেগ – ঘণ্টায় স্রোতের গতিবেগ
= ঘণ্টায় ৭ কি.মি. – ঘণ্টায় ৪ কি.মি. = ঘণ্টায় ৩ কি.মি.
নৌকাটি ৩ কি.মি. পথ ফিরে আসে ১ ঘণ্টায়

∴ " ১ " " " " $\frac{১}{৩}$ "

∴ " ৩৩ " " " " $\frac{১ * \cancel{৩৩}^{১১}}{\cancel{৩}_{১}}$ ঘণ্টায় বা, ১১ ঘণ্টায়।

উত্তর : ১১ ঘণ্টায়।
মন্তব্য : ঘণ্টায় গতিবেগ ৭ কি.মি. এর পরিবর্তে সংক্ষেপে গতিবেগ ৭ কি. মি. / ঘণ্টা লেখা হয়।

উদাহরণ ১০। একজন নৌকার মাঝি স্রোতের প্রতিকূলে ৮ ঘণ্টায় ৩২ কি.মি. যেতে পারে। স্রোতের অনুকূলে ঐ পথ যেতে মাঝির ৪ ঘণ্টা লাগে। স্রোতের বেগ ও নৌকার প্রকৃত বেগ নির্ণয় কর।

সমাধান : স্রোতের প্রতিকূলে নৌকাটি ৮ ঘণ্টায় চলে ৩২ কি.মি.

∴ " " " ১ " " $\frac{৩২}{৮}$ " বা, ৪ কি.মি.

স্রোতের অনুকূলে ৪ ঘণ্টায় চলে ৩২ কি.মি.

∴ " " ১ " " $\frac{৩২}{৪}$ " বা, ৮ কি.মি.

আমরা জানি, স্রোতের প্রতিকূলে নৌকার কার্যকরী গতিবেগ = নৌকার প্রকৃত গতিবেগ – স্রোতের গতিবেগ
আবার, স্রোতের অনুকূলে নৌকার কার্যকরী গতিবেগ = নৌকার প্রকৃত গতিবেগ + স্রোতের গতিবেগ

∴ নৌকার প্রকৃত গতিবেগ + স্রোতের গতিবেগ = ৮ কি.মি./ঘণ্টা
এবং নৌকার প্রকৃত গতিবেগ – স্রোতের গতিবেগ = ৪ কি.মি./ঘণ্টা
যোগ করে, ২ * নৌকার প্রকৃত গতিবেগ = (৮ + ৪) কি.মি./ঘণ্টা

∴ নৌকার প্রকৃত গতিবেগ = $\frac{৮ + ৪}{২}$ কি.মি./ঘণ্টা = ৬ কি.মি./ঘণ্টা

এবং স্রোতের গতিবেগ = (৮ – ৬) কি.মি./ঘণ্টা = ২ কি.মি./ঘণ্টা
উত্তর : ২ কি.মি. /ঘণ্টা, ৬ কি.মি./ঘণ্টা।
মন্তব্য : বীজগণিতীয় সমীকরণ প্রয়োগ করে সমস্যাটি আরও সহজে সমাধান করা যায়।

প্রশ্নমালা ৩.২

১। ৩ জন শ্রমিক দৈনিক ৭ ঘণ্টা পরিশ্রম করে ১২ দিনে ৬৫০৪ বর্গমিটার দেয়াল চুনকাম করতে পারেন। দৈনিক ৬ ঘণ্টা পরিশ্রম করে কত জন শ্রমিক ১৪ দিনে ৪৩৩৬ বর্গমিটার দেয়াল চুনকাম করতে পারবেন?

২। একটি বেঞ্চ তৈরি করতে যে সময় লাগে, একটি আলমারি তৈরি করতে তার তিনগুণ সময় লাগে। ৬ জন কাঠমিস্ত্রি ১২ দিনে ৩৬টি বেঞ্চ ও ৫টি আলমারি তৈরি করতে পারেন। ৬১টি বেঞ্চ ও ৮টি আলমারি তৈরি করতে ১০ জন মিস্ত্রির কত দিন লাগবে?

৩। ৩০ জন শ্রমিক ২৫ দিনে একটি বাড়ি তৈরি করতে পারেন। কাজ শুরু করার ১০ দিন পরে খারাপ আবহাওয়ার জন্য ৫ দিন কাজ বন্ধ রাখতে হল। নির্ধারিত সময়ে কাজটি শেষ করতে হলে অতিরিক্ত কত জন শ্রমিকের প্রয়োজন?

৪। একজন ঠিকাদার ১৯২০ মিটার দীর্ঘ একটি বাঁধ ১২০ দিনে শেষ করার চুক্তি করে ১৬০ জন শ্রমিক নিয়োগ করলেন। ২৪ দিন পর দেখা গেল মাত্র ২৪০ মিটার বাঁধ তৈরি হয়েছে। নির্ধারিত সময়ের মধ্যে কাজটি শেষ করতে হলে কত জন অতিরিক্ত শ্রমিকের প্রয়োজন হবে?

৫। ৩ জন পুরুষ বা ৪ জন বালক দৈনিক ৮ ঘণ্টা কাজ করে ৬৫ দিনে ৯৭৫০ টাকা আয় করে। ৭ জন পুরুষ এবং ৮ জন বালক দৈনিক ১০ ঘণ্টা কাজ করে কত দিনে ২৪৩৭৫ টাকা আয় করতে পারবে?

৬। ইসহাক সাহেব ৪টি গরু দ্বারা ৭ দিনে ৪০ হেক্টর জমি চাষ করতে পারেন। ৬টি গরু দ্বারা ১০$\frac{১}{২}$দিনে তিনি কত হেক্টর জমি চাষ করতে পারবেন?

৭। একটি গার্মেন্টস ফ্যাক্টরিতে ১৫০ জন শ্রমিক ১৫ দিনে ৬৭৫০ টি জামা তৈরি করতে পারেন। ঐ ফ্যাক্টরির ৬৫ জন শ্রমিক কত দিনে ৩৩১৫ টি জামা তৈরি করতে পারবেন?

৮। লিলি একা একটি কাজ ১০ ঘণ্টায় করতে পারে। হামিদা একা ঐ কাজটি ১২ ঘণ্টায় করতে পারে। লিলি ও হামিদা একত্রে কত ঘণ্টায় ঐ কাজটি করতে পারবে?

৯। তিন বন্ধু জহির, মিহির ও শিশির একটি কাজ যথাক্রমে ৬ দিন, ৮ দিন ও ১২ দিনে করতে পারে। তারা একত্রে কাজটি শুরু করার ২ দিন পরে জহির ও মিহির চলে গেল। বাকি কাজ শিশির কত দিনে করতে পারবে?

১০। ২ জন পুরুষ ৩ জন স্ত্রীলোকের সমান কাজ করে। ৪ জন পুরুষ ও ৯ জন স্ত্রীলোক একটি কাজ ৩০ দিনে করতে পারে। ঐ কাজটি ৫ জন পুরুষ ও ১৫ জন স্ত্রীলোক কত দিনে করতে পারবে?

১১। আজিজ ও কমল একত্রে একটি দেয়াল ২০দিনে তৈরি করতে পারে। উভয়ে ১২ দিন কাজ করার পর আজিজ একা বাকি কাজ ১০ দিনে শেষ করল। আজিজ ও কমল আলাদাভাবে কাজ করলে প্রত্যেকে কত দিনে ঐ দেয়াল তৈরি করতে পারবে?

১২। একটি কাজ ক ও খ একত্রে ১২ দিনে, খ ও গ একত্রে ১৫ দিনে, ক ও গ একত্রে ২০ দিনে করতে পারে। ক, খ ও গ একা কাজ করলে ঐ কাজটি শেষ করতে প্রত্যেকের কত দিন লাগবে?

১৩। ১ জন পুরুষ, ১ জন স্ত্রীলোক ও ১ জন বালক একত্রে একটি কাজ ৫ দিনে করতে পারে। কিন্তু ৫ জন স্ত্রীলোক ও ৫ জন বালক একত্রে ১ দিনে কাজটির $\frac{৭}{১২}$ অংশ করতে পারে। ১ জন পুরুষ একা ঐ কাজটি কত দিনে করতে পারবে?

১৪। দুইটি বাস ঘণ্টায় ২০ কি.মি. বেগে একই সময়ে গাবতলী বাস ডিপো থেকে আরিচা রওনা হল। সাভার পৌঁছার পর একটি বাস থেমে গেল। কিন্তু অপর বাসটি চলতে থাকল। আধা ঘণ্টা পর থেমে থাকা বাসটি ঘণ্টায় ২৫ কি.মি. বেগে আবার চলতে লাগল। সাভার থেকে কত দূরে বাস দুইটি মিলিত হবে?

১৫। ক ও খ স্থানের মধ্যবর্তী দূরত্ব ৩৫ কি.মি.। ক স্থান থেকে মনোয়ার ও খ স্থান থেকে ছালাম একই সময়ে পরস্পরের অভিমুখে যাত্রা শুরু করল। মনোয়ার ও ছালামের গতিবেগ যথাক্রমে ঘণ্টায় ৬ কি.মি. ও ৮ কি.মি. হলে, এরা কতক্ষণ পরে মিলিত হবে?

১৬। একটি ১২ কি.মি. সাইকেল দৌড় প্রতিযোগিতায় শুভ্র কাজলকে ৫ সেকেন্ডে পরাজিত করে। কাজলের গতিবেগ ঘণ্টায় ১৮ কি.মি. হলে, শুভ্রর গতিবেগ কত?

১৭। ৫০ মিটার দীর্ঘ একটি ট্রেন ঘণ্টায় ৩৬ কি.মি. বেগে চলে। রাস্তার পাশের একটি খুঁটিকে ট্রেনটি কত সেকেন্ডে অতিক্রম করবে?

১৮। ১০০ মিটার দীর্ঘ একটি ট্রেনের গতিবেগ ঘণ্টায় ৪৮ কি.মি.। ঐ ট্রেনটি ২১ সেকেন্ডে একটি সেতু অতিক্রম করে। সেতুটির দৈর্ঘ্য কত?

১৯। ২৫০ মিটার দীর্ঘ একটি সেতু অতিক্রম করতে ১৫০ মিটার দীর্ঘ একটি ট্রেনের ৩০ সেকেন্ড সময় লাগে। ১৩০ মিটার দীর্ঘ প্লাটফরম অতিক্রম করতে ট্রেনটির কত সেকেন্ড লাগবে?

২০। একটি চৌবাচ্চায় দুইটি নল আছে। প্রথম ও দ্বিতীয় নল যথাক্রমে ৬ ঘণ্টায় ও ১২ ঘণ্টায় খালি চৌবাচ্চাটি পূর্ণ করতে পারে। দুইটি নল একসঙ্গে খুলে দিলে খালি চৌবাচ্চাটি কত ঘণ্টায় পূর্ণ হবে?

২১। একটি বাড়ির ছাদের ট্যাঙ্কটি একটি নল দ্বারা ২৫ মিনিটে পূর্ণ করা যায়। ট্যাঙ্কটিতে বাড়ির কাজের জন্য যে নলটি আছে তা খুলে দিলে ৫০ মিনিটে পূর্ণ ট্যাঙ্কটি খালি হয়ে যায়। ট্যাঙ্কটি অর্ধপূর্ণ থাকা অবস্থায় দুইটি নল একসঙ্গে কাজ করলে কতক্ষণে ট্যাঙ্কটি পূর্ণ হবে?

২২। দুইটি নল দ্বারা চৌবাচ্চাটি যথাক্রমে ২০ মিনিট ও ৩০ মিনিটে পানি-পূর্ণ করা যায়। চৌবাচ্চাটি খালি থাকা অবস্থায় দুইটি নলই একসঙ্গে খুলে দেওয়া হল। প্রথম নলটি কখন বন্ধ করলে মোট ১৮ মিনিটে চৌবাচ্চাটি পানি-পূর্ণ হবে?

২৩। একটি চৌবাচ্চায় তিনটি নল আছে। দুইটি নল দ্বারা চৌবাচ্চাটি যথাক্রমে ১০ মিনিট ও ৩০ মিনিটে পানি-পূর্ণ করা যায়। তৃতীয় নলটি দ্বারা পানি বেরিয়ে যায়। যখন তিনটি নলই খোলা থাকে তখন ১৫ মিনিটে চৌবাচ্চা পানি-পূর্ণ হয়। তৃতীয় নলটি কতক্ষণে পানি-পূর্ণ চৌবাচ্চা খালি করতে পারে?

২৪। স্রোতের অনুকূলে একটি নৌকা ৪ ঘণ্টায় ৪০ কি.মি. পথ যায়। স্থির পানিতে ঐ নৌকার গতিবেগ ঘণ্টায় ৮ কি.মি. হলে, স্রোতের গতিবেগ কত ছিল?

২৫। একটি নৌকা স্থির পানিতে ঘণ্টায় ৬ কি.মি. যেতে পারে। স্রোতের প্রতিকূলে ৬ কি.মি. যেতে নৌকাটির ৩ গুণ সময় লাগে। স্রোতের অনুকূলে ৫০ কি.মি. যেতে নৌকাটির কত সময় লাগবে?

২৬। ঘাটে বাঁধা একটি নৌকা জোয়ারের টানে নোঙর ছিঁড়ে ২ ঘণ্টায় ৭·৫০ কি.মি. দূরে চলে গেল। পরে মাঝি দাঁড় টেনে নৌকাটিকে ৩ ঘণ্টায় ঘাটে ফিরিয়ে আনল। দাঁড়ের টানে নৌকার গতিবেগ কত ছিল?

২৭। স্রোতের অনুকূলে একটি স্টিমার ঢাকার সদরঘাট থেকে কোনো স্থানে ১০ ঘণ্টায় পৌঁছল। স্রোতের প্রতিকূলে স্টিমারটি ২০ ঘণ্টায় ঐ স্থান থেকে সদরঘাটে ফিরে আসে। স্টিমারের প্রকৃত গতিবেগ ঘণ্টায় ২১ কি.মি. হলে, সদরঘাট থেকে গন্তব্যস্থানের দূরত্ব কত?

২৮। দাঁড় বেয়ে একটি নৌকা স্রোতের অনুকূলে ৬ মিনিটে ১·৫ কি.মি. এবং স্রোতের প্রতিকূলে ১৫ মিনিটে ১·২৫ কি.মি. যায়। স্থির পানিতে নৌকা ও স্রোতের গতিবেগ নির্ণয় কর।

২৯। পুরুষ, স্ত্রীলোক ও বালকের কাজ করার ক্ষমতার অনুপাত ৩ ঃ ২ ঃ ১। ৪ জন পুরুষ, ৩ জন স্ত্রীলোক এবং ৬ জন বালক দৈনিক ১০ ঘণ্টা পরিশ্রম করে একটি কাজ ১৪ দিনে করতে পারে। ঐ কাজের দ্বিগুণ একটি কাজ ৪ জন পুরুষ, ৪ জন স্ত্রীলোক ও ১৫ জন বালক দৈনিক ৬ ঘণ্টা পরিশ্রম করে কত দিনে করতে পারবে?

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। একটি নির্দিষ্ট কাজ শেষ করতে শ্রমিক সংখ্যা দ্বিগুণ করা হলে, কাজটি করতে পূর্বের কতগুণ সময় লাগবে ?

ক. ৪ গুণ   খ. $\frac{১}{৪}$ গুণ

গ. ২ গুণ   ঘ. $\frac{১}{২}$ গুণ

২। স্রোতের বেগ ঘণ্টায় ২ কি.মি. এবং স্রোতের অনুকূলে নৌকার বেগ ঘণ্টায় ৫ কি.মি. হলে, স্থির পানিতে নৌকার বেগ ঘণ্টায় কত কি.মি. ?

ক. ৭ কি.মি.   খ. ৫ কি.মি.

গ. ৩ কি.মি.   ঘ. ১ কি.মি.

৩। ১৫টি ছাগলের মূল্য ৩টি গরুর মূল্যের সমান। ২০টি ছাগলের পরিবর্তে কয়টি গরু পাওয়া যাবে ?

ক. ৪ টি   খ. ৫ টি

গ. ৬ টি   ঘ. ১০ টি

৪। একটি প্লাটফর্মের দৈর্ঘ্য ১০০ মিটার। ১৫০ মিটার লম্বা ট্রেনকে ঐ প্লাটফর্ম অতিক্রম করতে কত দূরত্ব অতিক্রম করতে হবে ?

ক. ৫০ মিটার   খ. ১০০ মিটার

গ. ১৫০ মিটার   ঘ. ২৫০ মিটার

৫। i. স্রোতের অনুকূলে নৌকার কার্যকরী গতিবেগ = নৌকার প্রকৃত গতিবেগ + স্রোতের গতিবেগ।

ii. স্রোতের প্রতিকূলে কার্যকরী গতিবেগ = স্রোতের গতিবেগ - নৌকার প্রকৃত গতিবেগ।

iii. স্থির পানিতে নৌকার গতিবেগ হল, নৌকার প্রকৃত গতিবেগ।

ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii   খ. i ও iii

গ. ii ও iii   ঘ. i, ii ও iii

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। যশোর থেকে মাগুরার দূরত্ব ৫৬ $\frac{১}{৪}$ কি.মি.। রওশন যশোর থেকে রওনা হওয়ার ৩ ঘণ্টা পর তার বন্ধু রহমান একই স্থান থেকে মোটর সাইকেলে রওনা হল। রওশন ও রহমানের গতিবেগ ঘণ্টায় ১৫ কি.মি. ও ৭৫ কি.মি.।

ক. রহমানের যাত্রা শুরুর আগে তাদের দূরত্বের ব্যবধান কত ছিল ?

খ. রহমান ও রওশনের দূরত্ব ১ কি.মি.কমে কত সময়ে ?

গ. দুই বন্ধু কোথায় ও কখন মিলিত হবে ?

২। সোহেল ও মাসুম যথাক্রমে ২০ দিন ও ৩০ দিনে একটি জমির ধান কাটতে পারে। তারা একত্রে ৭ দিন কাজ করার পর উভয়েই চলে গেল। বাকি কাজ রতন ১০ দিনে শেষ করল।

ক. সোহেল ১ দিনে কাজটির কত অংশ করতে পারে ?

খ. সোহেল ও মাসুম ১ দিনে একত্রে কাজটির কত অংশ করতে পারে ?

গ. রতন সম্পূর্ণ কাজটি একা কত দিনে করতে পারে ?

৩। তোমার স্কুলের ছাদে একটি পানির ট্যাঙ্ক আছে। ট্যাঙ্কে তিনটি নল আছে। প্রথম ও দ্বিতীয় নল দ্বারা ট্যাঙ্কটি যথাক্রমে ২০ মিনিট ও ৩০ মিনিটে পূর্ণ হয়। তৃতীয় নল দ্বারা পূর্ণ ট্যাঙ্কটি ৬০ মিনিটে খালি হয়।

ক. তৃতীয় নল দ্বারা ১ মিনিটে ট্যাঙ্কটির কত অংশ খালি হয় ?

খ. প্রথম ও দ্বিতীয় নল দ্বারা পৃথকভাবে ১ মিনিটে ট্যাঙ্কের কত অংশ পূর্ণ হয় ?

গ. তিনটি নল একসঙ্গে খুলে দিলে ট্যাঙ্কটি কত মিনিটে পূর্ণ হবে?

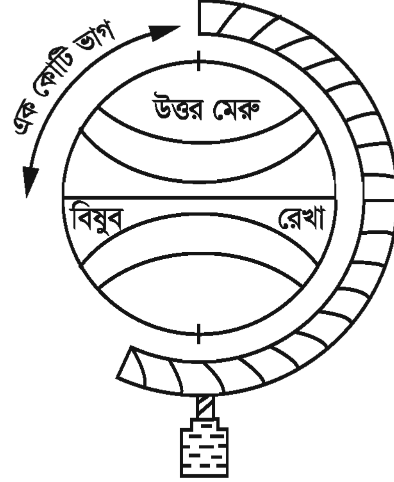
চতুর্থ অধ্যায়

পরিমাপ ও একক

৪·১ । রৈখিক পরিমাপ

আমরা বাজারে গিয়ে ৪ মিটার কাপড় কিনি; বলে থাকি আমার বাড়ি থেকে স্কুল ২ কিলোমিটার দূরে; রডটি ৫ ফুট লম্বা।

উপরের উদাহরণে মিটার, কিলোমিটার, ফুট – এ মাপগুলো রৈখিক মাপ। রেখার দৈর্ঘ্য মাপার ধারণা থেকে রৈখিক শব্দ এসেছে। গজ, ফুট, ইঞ্চি প্রথম চালু হয়েছে ইংল্যান্ডে। গজ, ফুট, ইঞ্চিকে বলা হয় বৃটিশ পদ্ধতিতে পরিমাপের একক।



বর্তমানে পৃথিবীর অধিকাংশ দেশে রৈখিক মাপ হিসেবে ব্যবহৃত হচ্ছে মেট্রিক পদ্ধতি। পৃথিবীর উত্তর মেরু থেকে যে-কোন দ্রাঘিমা বরাবর বিষুবরেখা পর্যন্ত দৈর্ঘ্যের কোটিভাগের একভাগকে ১ মিটার হিসেবে গণ্য করা হয়।

প্লাটিনাম ও ইরিডিয়াম ধাতুর সংমিশ্রণে তৈরি মিটারের আসল নমুনা পৃথিবীর সব দেশের জন্য "আদর্শ" বা স্ট্যান্ডার্ড রূপে গণ্য করা হয়। ঐটি ফরাসি দেশের বিজ্ঞান জাদুঘরে সংরক্ষিত রয়েছে। বিভিন্ন দেশের প্রয়োজনে আদর্শ নমুনা থেকে "নমুনা" তৈরি করে নেওয়া হয়।

১ মিটার = বিষুবরেখা থেকে উত্তর মেরু পর্যন্ত মোট দূরত্বের ১ কোটি ভাগের ১ ভাগ।

দ্রষ্টব্য : ১৯৮২ সাল থেকে বাংলাদেশের সর্বত্র দৈর্ঘ্য মাপার জন্য এবং ওজন নির্ণয়ের জন্য "আন্তর্জাতিক আদর্শমান" বা "সিস্টেম অব ইন্টারন্যাশনাল ইউনিটস" গ্রহণ করা হয়েছে। এই পদ্ধতিতে–

দৈর্ঘ্য পরিমাপের মূল একক 'মিটার'	ওজন পরিমাপের মূল একক 'গ্রাম'

নিচে বৃটিশ পদ্ধতি ও মেট্রিক পদ্ধতিতে রৈখিক মাপের তালিকা দেওয়া হল :

১২ ইঞ্চি	= ১ ফুট
৩ ফুট	= ১ গজ
১৭৬০ গজ	= ১ মাইল

১০ মিলিমিটার (মি.মি.)	= ১ সেন্টিমিটার (সে.মি.)
১০০ সেন্টিমিটার	= ১ মিটার (মি.)
১০০০ মিটার	= ১ কিলোমিটার (কি.মি.)

বৃটিশ পদ্ধতিতে জমির রৈখিক মাপ

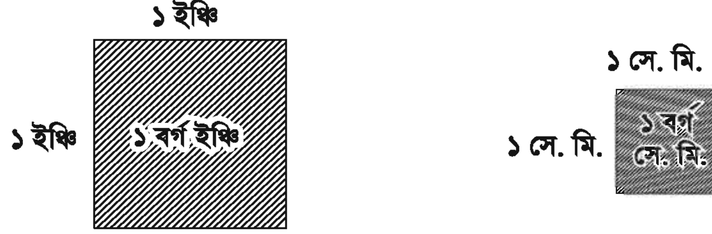
৭·৯২ ইঞ্চি	= ১ লিংক
২৫ লিংক	= ১ রড
৪ রড	= ১ চেইন
১০ চেইন	= ১ ফার্লং
৮ ফার্লং	= ১ মাইল

মেট্রিক ও বৃটিশ পরিমাপের সম্পর্ক

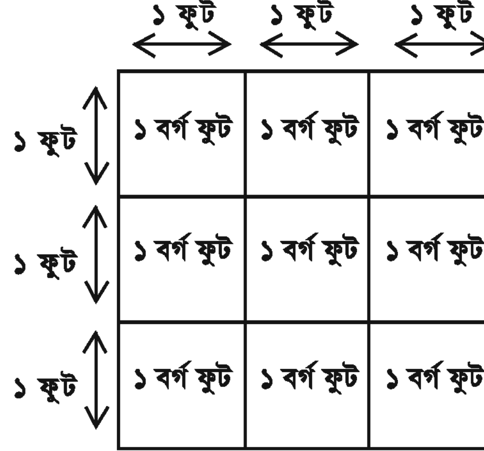
১ ইঞ্চি = ২·৫৪ সে. মি. (প্রায়)
৩৯·৩৭ ইঞ্চি (প্রায়) = ১ মিটার
১ মাইল = ১·৬১ কি. মি. (প্রায়)
১ কি. মি. = ০·৬২ মাইল (প্রায়)

৪·২। ক্ষেত্রফলের একক

কোনো সমতলে সীমাবদ্ধ স্থানকে ক্ষেত্র বলে। সীমাবদ্ধ স্থানের পরিমাপকে ক্ষেত্রফল বা কালি বলা হয়। ক্ষেত্রফলের একক হিসেবে এক একক দৈর্ঘ্যের বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে ধরা হয়। ক্ষেত্রফলের একক বর্গ একক রূপে লেখা হয়। যে বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য ১ ইঞ্চি, তার ক্ষেত্রফল ১ বর্গইঞ্চি, যে বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য ১ ফুট, তার ক্ষেত্রফল ১ বর্গফুট। আবার যে বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য ১ সে.মি. তার ক্ষেত্রফলকে ১ বর্গ সেন্টিমিটার ধরা হয়।



কোনো ক্ষেত্রের কালি নির্ণয় করতে হলে, এর মধ্যে বর্গ একক কতবার আছে তা স্থির করতে হয়।



উদাহরণস্বরূপ : মনে করি, উপরের বড় বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য ১ গজ। এর ক্ষেত্রফল ১ বর্গ গজ।

বর্গক্ষেত্রটির প্রত্যেক বাহুকে সমান তিন অংশে বিভক্ত করে বিপরীত বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করা হল। বর্গক্ষেত্রটি কতকগুলো ক্ষুদ্রতর বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত হল এবং তাদের প্রত্যেকটির ক্ষেত্রফলের পরিমাপ ১ বর্গফুট। চিত্রটিতে তিনটি সারির প্রত্যেক সারিতে তিনটি করে বর্গক্ষেত্র আছে। অর্থাৎ, এতে ৩ * ৩ = ৯ টি ক্ষুদ্রতর বর্গক্ষেত্র আছে।

অতএব, ৯ বর্গফুট = ১ বর্গগজ।

তদ্রূপ ১ ফুট দৈর্ঘ্যের বর্গক্ষেত্র নিয়ে তার প্রত্যেক বাহুকে ১২টি সমান অংশে ভাগ করে আগের মতো সংযুক্ত করে দেখানো যায় যে, ১ বর্গফুট = ১২ * ১২ অর্থাৎ ১৪৪ বর্গইঞ্চি।

যেহেতু ১২ ইঞ্চি = ১ ফুট $\therefore$ ১২ * ১২ বা ১৪৪ বর্গইঞ্চি = ১ বর্গফুট

এবং যেহেতু ৩ ফুট = ১ গজ $\therefore$ ৩ * ৩ বা ৯ বর্গফুট = ১ বর্গগজ।

মন্তব্য : ৪ ফুট বর্গ এবং ৪ বর্গফুট এক কথা নয়। ৪ ফুট বর্গ দ্বারা এমন একটি বর্গক্ষেত্রকে বোঝায় যার প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য ৪ ফুট এবং তার ক্ষেত্রফল (৪ * ৪) বা ১৬ বর্গফুট। ৪ বর্গফুট দ্বারা এমন একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বোঝায়, যার প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য ২ ফুট।

৪·৩। ভূমি পরিমাপ

বৃটিশ পদ্ধতিতে

১৪৪ বর্গইঞ্চি	=	১ বর্গফুট
৯ বর্গফুট	=	১ বর্গগজ
৪৮৪০ বর্গগজ	=	১ একর

স্থানীয় পদ্ধতিতে

১ বর্গহাত	=	১ গণ্ডা
২০ গণ্ডা	=	১ ছটাক
১৬ ছটাক	=	১ কাঠা
২০ কাঠা	=	১ বিঘা

বৃটিশ এবং স্থানীয় পরিমাপের সম্পর্ক

৪ গণ্ডা	=	১ বর্গগজ
৫ বর্গগজ	=	১ ছটাক
৮০ বর্গগজ	=	৭২০ বর্গফুট = ১ কাঠা
১৬০০ বর্গগজ	=	১ বিঘা
৬৪০ একর	=	১ বর্গমাইল

৪·৪। ওজন পরিমাপ

প্রত্যেক ঘনবস্তুর ওজন আছে। বিভিন্ন দেশে বিভিন্ন এককের সাহায্যে দ্রব্য ওজন করা হয়। বাংলাদেশে ১৯৮২ সাল থেকে ওজন পরিমাপের জন্য মেট্রিক পদ্ধতিতে "আন্তর্জাতিক আদর্শমান" কিলোগ্রাম ব্যবহার করা হচ্ছে।

ওজন পরিমাপের মূল একক গ্রাম। ৪° সেলসিয়াস তাপমাত্রায় ১ ঘন সে.মি. পানির ওজন হচ্ছে ১ গ্রাম এবং ঐ তাপমাত্রায় পানি সবচেয়ে ভারী।

ইতোপূর্বে আমাদের দেশে বৃটিশ পদ্ধতি ও দেশীয় পদ্ধতি চালু ছিল।

বৃটিশ ওজন পদ্ধতি

১৬ আউন্স	= ১ পাউন্ড
২৮ পাউন্ড	= ১ কোয়ার্টার
৪ কোয়ার্টার	= ১ হন্দর
২০ হন্দর	= ১ বৃটিশ টন

দেশীয় ওজন পদ্ধতি

৫ তোলা	= ১ ছটাক
১৬ ছটাক	= ১ সের
৪০ সের	= ১ মণ

মেট্রিক ওজন পদ্ধতি

১০০০ মিলিগ্রাম	= ১ গ্রাম
১০০০ গ্রাম	= ১ কিলোগ্রাম (কেজি)
১০০ কিলোগ্রাম	= ১ কুইন্টাল
১০০০ কিলোগ্রাম	= ১ মেট্রিক টন।

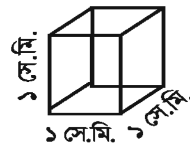
ওজন পরিমাপের বিভিন্ন এককের সম্পর্ক

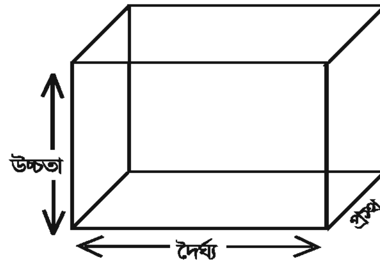
১ গ্রাম	=	০·০০২২ পাউন্ড (প্রায়)
	=	০·০৮৬ তোলা (প্রায়)
১ পাউন্ড	=	৪৫৩·৬০ গ্রাম (প্রায়)
১ তোলা	=	১১·৬৩ গ্রাম (প্রায়)
১ কিলোগ্রাম (কেজি)	=	২·২০ পাউন্ড (প্রায়)
	=	১·০৭ সের (প্রায়)
১ সের	=	০·৯৩ কিলোগ্রাম (প্রায়)
১ মণ	=	৩৭·৩২ কিলোগ্রাম (প্রায়)
১ হন্দর	=	১ মণ ১৪ সের ৭ ছটাক (প্রায়)
	=	৫০·৮ কিলোগ্রাম (প্রায়)
১ টন (বৃটিশ)	=	২৭ মণ ৯ সের (প্রায়)
	=	১ মেট্রিক টন ১৬ কিলোগ্রাম (প্রায়)

৪·৫। ঘনবস্তুর পরিমাপ

আয়তন : একটি ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা আছে। ঘনবস্তু কতটা জায়গা জুড়ে থাকে তা তার আয়তন। যে জায়গা দৈর্ঘ্যে ১ সে.মি., প্রস্থে ১ সে.মি. এবং উচ্চতায় ১ সে.মি. ঐ জায়গার আয়তন ১ ঘন সে.মি. যা আয়তনের একক।

যে ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান তা একটি ঘনক।

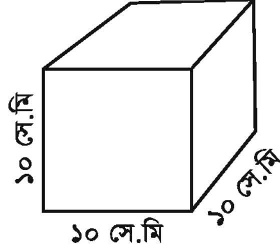




আয়তাকার ঘনবস্তুর আয়তন = দৈর্ঘ্য * প্রস্থ * উচ্চতা

তরল পদার্থের পরিমাপ নির্ণয় করতে ঘনকের আয়তনের ধারণা প্রয়োগ করা হয়।

৪·৬। তরল পদার্থের পরিমাপ



শক্ত কাগজ দিয়ে একটা বাক্স তৈরি করি যেন বাক্সটির ভিতরের দৈর্ঘ্য ১০ সে.মি., প্রস্থ ১০ সে.মি, এবং উচ্চতা ১০ সে.মি, হয়। তাহলে বাক্সের ভিতরের আয়তন হবে (১০ * ১০ *১০) বা ১০০০ ঘন সে.মি.। ঐ কাগজের বাক্সকে পানি দিয়ে পূর্ণ করলে পানির পরিমাপ হবে ১০০০ ঘন সে.মি.। তরল পদার্থের ১০০০ ঘন সে.মি. আয়তনকে বলা হয় ১ লিটার।

মন্তব্য : ঘন সে. মি.-কে সংক্ষেপে ইংরেজিতে সি. সি. (Cubic Centimetre) লেখা হয়।

১ ঘন সে. মি. (সি. সি.) = ১ মিলিলিটার	১ ঘন ইঞ্চি = ১৬·৩৯ মিলিলিটার (প্রায়)

৪·৭। মেট্রিক পদ্ধতিতে এককের সাথে দশমিকের সম্পর্ক

আমরা জানি, কোনো দশমিক সংখ্যার কোনো অঙ্কের স্থানীয় মান তার অব্যবহিত ডান অঙ্কের স্থানীয় মানের দশ গুণ এবং তার অব্যবহিত বাম অঙ্কের স্থানীয় মানের দশ ভাগের এক ভাগ। মেট্রিক প্রণালীতে দৈর্ঘ্য, ওজন বা আয়তন মাপার ক্রমিক এককগুলোর মধ্যেও সে সম্পর্ক বিদ্যমান আছে। সুতরাং দশমিকের সাহায্যে মেট্রিক পদ্ধতিতে নিরূপিত কোনো দৈর্ঘ্য, ওজন বা আয়তনের মাপকে যে-কোনো এককে সহজেই প্রকাশ করা যায়।

সহস্র ১০০০	শতক ১০০	দশক ১০	একক ১	দশমাংশ ·১	শতাংশ ·০১	সহস্রাংশ ·০০১
কিলো	হেক্টো	ডেকা	মিটার বা গ্রাম বা লিটার	ডেসি	সেন্টি	মিলি

প্রশ্নমালা ৪·১

১। সেন্টিমিটার ও মিলিমিটারে প্রকাশ কর :

(ক) ৮ মিটার (খ) ৭·৪ মিটার (গ) ১৩·৯৬ মিটার
(ঘ) ০·০০৭ মিটার (ঙ) ০·০৪৭৯ কি. মি.

২। মিটারে প্রকাশ কর :

(ক) ৪৯৩ মি. মি. (খ) ৭৫৬·৫ সে.মি. (গ) ২৩·৮ কি.মি.
(ঘ) ৮ কি.মি. ৯ সে. মি. (ঙ) ২৫ কি. মি. ৩ সে. মি.

৩। কিলোমিটারে প্রকাশ কর :

(ক) ৪০৩৯০ সে.মি. (খ) ৫৩৫৯ মি.মি. (গ) ৯৭৮৬৫ মি. মি.
(ঘ) ৯ মি. ৭ সে. মি. ৮ মি. মি. (ঙ) ৭৫ মিটার ২৫০ মি. মি.

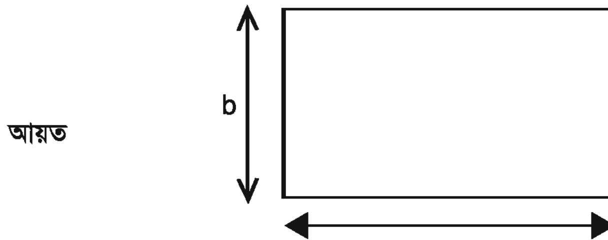
৪। মিটার, ডেসিমিটার, সেন্টিমিটার এবং মিলিমিটারে প্রকাশ কর :

(ক) ৩·৫ মিটার (খ) ·৭৬৪ মি.
(গ) ৫·৩৭ ডেকা মি. (ঘ) ·০০৫৬ ডেকা মি.

৪·৮। পরিমাপ সংক্রান্ত সমস্যা ও সমাধান

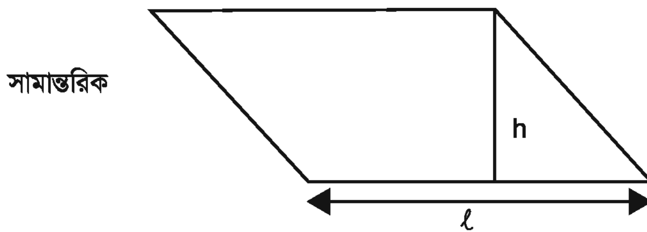
নিচে কয়েকটি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সূত্র দেওয়া হল :

আয়ত



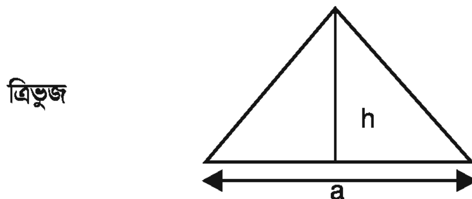
ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য * প্রস্থ
= ℓ * b বর্গ একক

সামান্তরিক



ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য * উচ্চতা
= ℓ * h বর্গ একক

ত্রিভুজ



ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ (ভূমি * উচ্চতা)
= $\frac{1}{2}$ (a * h) বর্গ একক

উদাহরণ ১। একটি আয়তের দৈর্ঘ্য ৯ মিটার এবং প্রস্থ ৩ মিটার। আয়তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : নির্ণেয় ক্ষেত্রফল = (৯ * ৩) বর্গ মিটার

= ২৭ বর্গ মিটার

উদাহরণ ২। একটি ঘরের ৩টি দরজা এবং ৬টি জানালা আছে। প্রত্যেকটি দরজা ২ মিটার লম্বা এবং ১·২৫ মিটার চওড়া, প্রত্যেকটি জানালা ১·২৫ মিটার লম্বা এবং ১ মিটার চওড়া। ঐ ঘরের দরজা জানালা তৈরি করতে ৫ মিটার লম্বা ও ০·৬০ মিটার চওড়া কয়টি তক্তার প্রয়োজন?

সমাধান : ৩টি দরজার ক্ষেত্রফল = (২ * ১·২৫) * ৩ বর্গ মিটার

= ৭·৫ বর্গ মিটার

৬টি জানালার ক্ষেত্রফল = (১·২৫ * ১) * ৬ বর্গ মিটার

= ৭·৫ বর্গ মিটার

তক্তার ক্ষেত্রফল = (৫ * ০·৬) বর্গ মিটার = ৩ বর্গ মিটার

∴ নির্ণেয় তক্তার সংখ্যা = দরজা ও জানালার একত্রে ক্ষেত্রফল ÷ তক্তার ক্ষেত্রফল

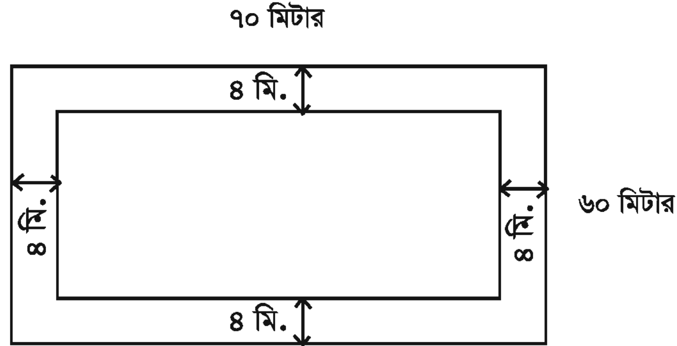
= (৭·৫ + ৭·৫) ÷ ৩

= ১৫ ÷ ৩ = ৫

উত্তর : ৫টি।

উদাহরণ ৩। পাড়সহ একটি পুকুরের দৈর্ঘ্য ৭০ মিটার এবং প্রস্থ ৬০ মিটার। যদি পুকুরের প্রত্যেক পাড়ের বিস্তার ৪ মিটার হয়, তবে পুকুরপাড়ের ক্ষেত্রফল কত?

সমাধান :



পুকুরসহ জমির ক্ষেত্রফল = (৭০ * ৬০) বর্গ মিটার

= ৪২০০ বর্গ মিটার

পাড় বাদে পুকুরের ক্ষেত্রফল = {৭০ – (৪ * ২)} {৬০ – (৪ * ২)} বর্গ মিটার

= (৬২ * ৫২) বর্গ মিটার

= ৩২২৪ বর্গ মিটার

∴ পুকুরপাড়ের ক্ষেত্রফল = (৪২০০ – ৩২২৪) বর্গ মিটার

= ৯৭৬ বর্গ মিটার

উত্তর : ´মিটার।

প্রশ্নমালা ৪.২

নিচে কয়েকটি ত্রিভুজের ভূমি ও উচ্চতা দেওয়া হল। ত্রিভুজগুলোর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর : (প্রশ্ন ১–৪)

১। ভূমি ১০ মি. ও উচ্চতা ৪ মি.।

২। ভূমি ২৫ সে.মি. ও উচ্চতা ১২ সে.মি.।

৩। ভূমি ২৩ মি. ও উচ্চতা ১০ মি.।

৪। ভূমি ১১০ মি. ও উচ্চতা ২৫ মি.।

৫। একটি আয়তাকার বাগানের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে ৬০ মিটার, ৪০ মিটার। এর ভিতরে চতুর্দিকে ২ মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৬। একটি ঘরের দৈর্ঘ্য বিস্তারের ৩ গুণ। প্রতি বর্গমিটারে ৭·৫০ টাকা দরে ঘরের মেঝে কার্পেট দিয়ে মুড়তে মোট ১১০২·৫০ টাকা ব্যয় হয়। ঘরটির দৈর্ঘ্য ও বিস্তার নির্ণয় কর।

৭। একটি ঘনকের একধারের দৈর্ঘ্য ৫ মি.। ঘনকের আয়তন নির্ণয় কর।

৮। একটি মগের ভিতরের আয়তন ১·৫ লিটার হলে, ৪৫০ লিটারে কত মগ পানি হবে?

৯। কোনো সামান্তরিকের দৈর্ঘ্য ৭৫ সে.মি. ও উচ্চতা ৪০ সে.মি. হলে, তার ক্ষেত্রফল কত হবে?

১০। একটি সামান্তরিক ক্ষেত্রের ভূমি ৪০ মিটার এবং উচ্চতা ৩০ মিটার। এর ক্ষেত্রফল বাহির কর।

১১। একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য ১৬ মিটার। এর ক্ষেত্রফল কত?

১২। এক খণ্ড সোনার বারের দৈর্ঘ্য ২০ সে. মি., প্রস্থ ১৫ সে. মি. এবং উচ্চতা ৪ সে. মি.। সোনা পানির তুলনায় ১৯·৩ গুণ ভারী হলে, উক্ত সোনার বারের ওজন কত কিলোগ্রাম?

১৩। একটি আয়তাকার চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য ৫·৫ মিটার, প্রস্থ ৪ মিটার এবং উচ্চতা ২ মিটার। উক্ত চৌবাচ্চা ভর্তি পানি থাকলে পানির আয়তন কত লিটার এবং ওজন কত কিলোগ্রাম হবে? [যেহেতু ১ লিটার পানির ওজন ১ কিলোগ্রাম]

১৪। কোনো পরিবারে দৈনিক ১·২৫ লিটার দুধ লাগে। প্রতি লিটার দুধের দাম ১২ টাকা হলে, ঐ পরিবারে ৩০ দিনের দুধের দাম নির্ণয় কর।

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। ১ মণ = কত কিলোগ্রাম ?

ক. ৩৭·৩২ খ. ৩২·৩৭

গ. ৩৯·৩৭ ঘ. ৩৭·৩৯

২। i. আয়তন = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা

ii. আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

iii. সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

ওপরের তথ্য অনুযায়ী নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii

গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে ৩ - ৪ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

একটি বাক্সের দৈর্ঘ্য ১০ সে.মি., প্রস্থ ১০ সে.মি. এবং উচ্চতা ১০ সে.মি.।

৩। বাক্সটির আয়তন কত ঘন সে.মি. ?

ক. ১০ খ. ১০০

গ. ১০০০ ঘ. ১০০০০

৪। বাক্সটি পানি পূর্ণ করলে পানির ওজন কত হবে ?

ক. ১ কেজি খ. ১০ কেজি

গ. ১০০ কেজি ঘ. ১০০০ কেজি

৫। i. দৈর্ঘ্য পরিমাপের মূল একক মিটার

ii. ওজন পরিমাপের মূল একক গ্রাম

iii. তরল পদার্থের আয়তন পরিমাপের মূল একক কেজি

ওপরের তথ্য অনুযায়ী নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i খ. ii

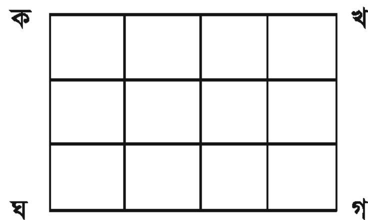
গ. i ও ii ঘ. ii ও iii

৬। ০·০০৭ মিটার = কত সে.মি.?

ক. ০·৭ খ. ৭

গ. ০·০৭ ঘ. ৭০

৭।



প্রতিটি ক্ষুদ্রতম বর্গের দৈর্ঘ্য ১ ইঞ্চি হলে, চিত্রে অঙ্কিত কখগঘ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল কত বর্গইঞ্চি ?

ক. ৩ খ. ৪

গ. ১২ ঘ. ১৬

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। একটি আয়তাকার বাগানের দৈর্ঘ্য ৮০ মিটার এবং প্রস্থ ৭০ মিটার। এর ভিতরে চারদিকে ৫ মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে।
   ক. রাস্তা বাদে বাগানের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
   খ. রাস্তা বাদে বাগানের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
   গ. প্রতি বর্গমিটারে ৬৪ টাকা হিসেবে ঐ রাস্তায় ঘাস লাগাতে কত খরচ হবে?

২। একটি বিদ্যালয়ের হল ঘরে ৪টি দরজা ও ৮টি জানালা আছে। প্রত্যেক দরজা ২·৫ মিটার লম্বা এবং ১·৫ মিটার চওড়া, প্রত্যেক জানালা ২ মিটার লম্বা এবং ১·৫ মিটার চওড়া।
   ক. প্রত্যেকটি দরজার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
   খ. জানালাগুলোর মোট ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
   গ. ঐ হল ঘরের দরজা-জানালা তৈরি করতে প্রতিটি ৫ মিটার দৈর্ঘ্য ও ০·৬০ মিটার প্রস্থের কতটি তক্তা লাগবে?

৩। একটি ঘরের দৈর্ঘ্য বিস্তারের ৩ গুণ। ঘরের মেঝে কার্পেট দিয়ে মুড়তে মোট ১১০২·৫০ টাকা ব্যয় হয়।
   ক. ঘরটির বিস্তার x মিটার হলে, দৈর্ঘ্যকে x এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।
   খ. প্রতি বর্গমিটারে খরচ ৭·৫০ টাকা হলে, ঘরটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
   গ. ঘরটির দৈর্ঘ্য ও বিস্তার নির্ণয় কর।

৪। একটি আয়তাকার চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য ৫·৫ মিটার, প্রস্থ ৪০০ সে.মি. এবং উচ্চতা ২০০ সে.মি.।
   ক. চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য কত সে.মি. ?
   খ. চৌবাচ্চার আয়তন নির্ণয় কর।
   গ. চৌবাচ্চার পানির ওজন কত ? (১ লিটার পানির ওজন ১ কিলোগ্রাম)

নিম্ন মাধ্যমিক গণিত

বীজগণিত

প্রথম অধ্যায়

বীজগণিতীয় রাশিমালার যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ

১·১। পূর্বপাঠের পুনরালোচনা

বীজগণিতীয় রাশিমালা

$5a \div b + 3c - 2d * f$ একটি বীজগণিতীয় রাশিমালা বা সংক্ষেপে রাশি। প্রক্রিয়া চিহ্ন, সংখ্যাসূচক প্রতীক ও সংখ্যার অর্থবোধক বিন্যাসকে বীজগণিতীয় রাশিমালা বা রাশি বলে।

রাশির পদ

রাশির যে যে অংশগুলো যোগ (+) ও বিয়োগ (–) চিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত থাকে, তাদের প্রত্যেকটিকে ঐ রাশিমালার পদ বলে। যেমন, $5a \div b + 3c - 2d * 9e + f$ এ চারটি পদ হল যথাক্রমে $5a \div b, 3c, 2d * 9e$ এবং f.

যে রাশিতে কেবল একটি পদ থাকে, তাকে **একপদী রাশি** বলা হয়। যেমন, $2b, 5ab, 3a \div 5b^2 * 3c$ প্রত্যেকটি একপদী রাশি। রাশিতে দুইটি পদ থাকলে **দ্বিপদী রাশি** এবং তিনটি পদ থাকলে **ত্রিপদী রাশি** বলা হয়। সাধারণত ত্রিপদী রাশিকে **বহুপদী** রাশিও বলে। রাশিতে তিনটি বা তিনটির বেশি পদ থাকলে, ঐ রাশিকে **বহুপদী রাশি** বলা হয়। যেমন, $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ একটি বহুপদী রাশি।

সহগ

বীজগণিতীয় রাশির কোনো পদের সাংখ্য গুণককে ঐ পদের সহগ বলে। যেমন, $4x^2 + 3y$ রাশির প্রথম পদের সহগ 4 এবং দ্বিতীয় পদের সহগ 3।

কোনো পদে সহগ উল্লেখ না থাকলে সহগ 1 ধরা হয়।

সূচক

আমরা জানি, $a * a * a * a * a$ কে সংক্ষেপে a^5 লেখা হয়। এখানে a^5 কে বলা হয় a এর 5-তম শক্তি বা ঘাত। 5 কে বলা হয় a এর শক্তির বা ঘাতের **সূচক**। কোনো সংখ্যার 2-তম ও 3-তম শক্তিকে যথাক্রমে ঐ সংখ্যার বর্গ ও ঘন বলা হয়।

যোগাত্মক বিপরীত সংখ্যা

দুইটি সংখ্যা a ও b এর একটিকে অপরটির যোগাত্মক বিপরীত বলা হয় যদি $a + b = o$ হয়। কোনো সংখ্যা a এর যোগাত্মক বিপরীত সংখ্যা $-a$ লেখা হয়। যেমন, 5 এর যোগাত্মক বিপরীত সংখ্যা -5 এবং -5 এর যোগাত্মক বিপরীত সংখ্যা $-(-5) = 5$।

সদৃশ ও অসদৃশ পদ

বীজগণিতীয় রাশিমালায় অন্তর্ভুক্ত যেসব পদের সহগ ব্যতীত বাকি অংশ একই, তাদের সদৃশ পদ বলা হয়। অন্যথায় পদগুলো অসদৃশ। যেমন,

সদৃশ পদ : (i) $3abx^2$ এবং $5x^2 ab$ (ii) $5x^2yz$, $7yx^2z$ এবং $5zx^2y$

(iii) $9a^3b^3c^3$, $8b^3a^3c^3$ এবং $8c^3a^3b^3$

অসদৃশ পদ : (i) $2x^2y$ এবং $3xy^2$ (ii) $2x^2y^2$ এবং $5x^2y^2z$.

১·২। বিনিময় বিধি

$a + b = b + a$ কে যোগের বিনিময় বিধি এবং $a * b = b * a$ কে গুণনের বিনিময় বিধি বলা হয়।

১·৩। সংযোগ বিধি

$(a + b) + c = a + (b + c)$ কে যোগের সংযোগ বিধি এবং $(a * b) * c = a * (b * c)$ কে গুণনের সংযোগ বিধি বলা হয়।

১·৪। বীজগণিতীয় রাশিমালার যোগ

উদাহরণ ১। যোগ কর : $3a + 5b, 2a$

সমাধান : $(3a + 5b) + 2a$

$= 3a + (5b + 2a)$ [সংযোগ বিধি]

$= 3a + (2a + 5b)$ [বিনিময় বিধি]

$= (3a + 2a) + 5b$ [সংযোগ বিধি]

$= 5a + 5b$

লক্ষণীয় : সংযোগ বিধি এবং বিনিময় বিধির সাহায্যে সদৃশ পদগুলোকে পাশাপাশি নিয়ে আসা হয়েছে।

উদাহরণ ২। যোগ কর : $3a + 2b + 5c, 4a - 3b - 2c$

সমাধান : $(3a + 2b + 5c) + (4a - 3b - 2c)$

$= (3a + 4a) + (2b - 3b) + (5c - 2c)$ [যোগের সংযোগ ও বিনিময় বিধি ব্যবহার করে সদৃশ পদগুলোকে পাশাপাশি আনা হল।]

$= 7a - b + 3c$

উদাহরণ ৩। যোগ কর : $3a^2b - 7ab^2 + 8b^3, - 10b^3 + 9ab^2 + 10a^2b.$

সমাধান : নির্ণেয় যোগফল $= (3a^2b - 7ab^2 + 8b^3) + (-10b^3 + 9ab^2 + 10a^2b)$

$= 3a^2b - 7ab^2 + 8b^3 - 10b^3 + 9ab^2 + 10a^2b)$

$= (3a^2b + 10a^2b) + (-7ab^2 + 9ab^2) + (8b^3 - 10b^3)$

$= 13a^2b + 2ab^2 - 2b^3$ [সংযোগ বিধি ও বিনিময় বিধি অনুযায়ী]

লক্ষ করি : $13 = 3 + 10, 2 = - 7 + 9, -2 = 8 - 10$

সুতরাং, দেখা যাচ্ছে সদৃশ পদের সাংখ্য-সহগগুলোর বীজগণিতীয় যোগফল বের করা হয়েছে। প্রাপ্ত যোগফলের পাশে সংশ্লিষ্ট পদের প্রতীকগুলো বসানো হয়েছে। এভাবে প্রাপ্ত সব পদের যোগফলই নির্ণেয় যোগফল।

বিকল্প পদ্ধতি : $3a^2b - 7ab^2 + 8b^3$

$10a^2b + 9ab^2 - 10b^3$

$13a^2b + 2ab^2 - 2b^3$

নির্ণেয় যোগফল $= 13a^2b + 2ab^2 - 2b^3$

নিয়ম : (i) প্রথমে পদগুলোকে সাজিয়ে এমনভাবে লিখতে হবে যেন সদৃশ পদগুলো নিচে নিচে পড়ে।

(ii) এরপর চিহ্নযুক্ত সংখ্যার যোগের নিয়মে সদৃশ পদের সাংখ্য-সহগ যোগ করতে হবে। প্রাপ্ত যোগফলের পাশে সংশ্লিষ্ট সদৃশ পদের প্রতীকগুলো বসাতে হবে।

(iii) সব সদৃশ পদের এবং অসদৃশ পদগুলোর যোগফলই নির্ণেয় যোগফল।

উদাহরণ ৪। যোগ কর :

$x^3 + 3x^2y - 5x + 4$, $2x^3 - 6x^2 + 7x - 8$, $x^3 + 7x^2 - 2xy^2 + 9$ এবং $5x^2 + 2$.

সমাধান : সদৃশ পদগুলো নিচে নিচে সাজিয়ে আমরা পাই,

$x^3 + 3x^2y - 5x + 4,$

$2x^3 + 7x - 8 - 6x^2$

$x^3 + 9 + 7x^2 - 2xy^2$

$+ 2 + 5x^2$

$4x^3 + 3x^2y + 2x + 7 + 6x^2 - 2xy^2$

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল $= 4x^3 + 3x^2y + 2x + 7 + 6x^2 - 2xy^2$

প্রশ্নমালা ১·১

যোগ কর : (প্রশ্ন 1–6)

1. $-k + 3m + 5n$ এবং $5k - 4m - 6n$.
2. $-a + 2b + 5c$ এবং $7a - 3b - 8c$.
3. $-3x + 5y - 9z$, $5x - 3y + 7z$ এবং $-2y + z$.
4. $3a - 2b + 7c - 8d$, $2c + 6d - 5a$, $3b + d - 10c$ এবং $-7d + 5b$.
5. $8x^3 - 7x^2 + 13x + 8$, $-6x^3 - 7x + 9$ এবং $8x^2 + 9x - 7$
6. $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ এবং $-2x^3 + 5$.

সদৃশ পদগুলো নিচে নিচে সাজিয়ে যোগ কর : (প্রশ্ন 7 – 12)

7. $5x^3y - 3x^2y^2 + 9xy^3 - y^4$, $-2x^3y - 9x^2y^2 + y^4$ এবং $5x^2y^2 + 2xy^3$.
8. $a^3 - b^3$, $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $-2a^3 - 2b^3$ এবং $-5a^2b + 5b^3$.

9. $8a^2xy^2 + 3a^2x^2y^2 - 8, \quad -5a^2xy^2 - 6a^2x^2y^2$ এবং $7a^2xy^2 + y^3$

10. $p^3q^3r^3 - 3p^2q^2r^2 + 5p^4q^4r^4, - 7p^4q^4r^4 + 8$ এবং $7p^3r^3q^3 - 10.$

11. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{4}z, \quad \frac{1}{3}z - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}x$ এবং $\frac{1}{2}z - \frac{1}{3}x.$

12. $\frac{1}{8}a^2x - \frac{5}{8}ax^2 - \frac{3}{4}a^3, \quad a^3 - \frac{1}{8}a^2x + \frac{1}{2}ax^2$ এবং $\frac{3}{4}ax^2 - \frac{1}{2}a^3$

a = 1, b = 2, x = 3 হলে, মান নির্ণয় কর : (প্রশ্ন 13 – 18)

13. $(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + (-3a^2b + 5ab^2 - b^3) + (2a^3 - 8ab^2).$

14. $(x^2y^2 + 3x - 5) + (6x - y^3 + 2) + (y^3 - x^2y^2 + 3).$

15. $(3x^4 + 5x^3 + 8x^2 - 6x + 5) + (7 + 6x - 9x^2 - 5x^3 - 3x^4).$

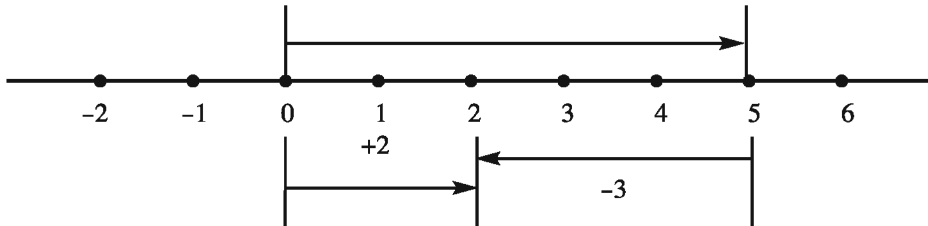
16. $(a^2x^2 - 3a^3x + 25a^4) + (-5a^3x + 11a^2x^2 - 12a^4) + (8a^3x - 12a^2x^2 - 14a^4).$

17. $(a^2 + 4ab + 4b^2) + (4b^2 - 4ab + a^2) + (a^2 - 8b^2).$

18. $(a^2b^2x^2 + 3a^3b^3x^2 - 6a^5xy) + (2a^5xy - 4x^2a^3b^3) + (b^3a^3x^2 + 4a^5xy).$

১·৫। বীজগণিতীয় রাশিমালার বিয়োগ

পাটিগণিতে বৃহত্তর সংখ্যা থেকে ক্ষুদ্রতর সংখ্যা বিয়োগ করা যায়। যেমন, 5 – 3 = 2.
(+ 5), (–3) এর যোগফল আমরা সংখ্যারেখার সাহায্যে বের করতে পারি।



উপরের সংখ্যারেখা থেকে আমরা বলতে পারি, (+ 5) + (–3) =2.

$$5 - 3 = (+5) + (-3)$$

অর্থাৎ 5 থেকে 3 বিয়োগ করার অর্থ হল 5 এর সঙ্গে (+3) এর বিপরীত (–3) যোগ করা।
সাধারণভাবে, $a - b = a + (-b)$

একটি রাশি থেকে অপর একটি রাশি বিয়োগ করার অর্থ হল প্রথম রাশির সঙ্গে দ্বিতীয় রাশির যোগাত্মক বিপরীত রাশি যোগ করা।

উদাহরণ ৫। $5x^2y^2$ থেকে $2x^2y^2$ বিয়োগ কর।

সমাধান : $5x^2y^2 - 2x^2y^2$
$= 5x^2y^2 + (-2x^2y^2)$
$= 3x^2y^2.$

লক্ষ করি : বিয়োজ্যের চিহ্ন বদলিয়ে যোগ করা হয়েছে।

উদাহরণ ৬। $2y^2 - 3xy + x^2$ থেকে $4y^2 + 4xy - 2x^2$ বিয়োগ কর।

সমাধান : বিয়োজ্যের প্রত্যেক পদের যোগাত্মক বিপরীত পদ নিয়ে অর্থাৎ, প্রত্যেক পদের চিহ্ন বদলিয়ে আমরা পাই, $- 4y^2 - 4xy + 2x^2$.

এখন প্রথম রাশি ও রূপান্তরিত বিয়োজ্য যোগ করতে হবে। এ দুইটি রাশির সদৃশ পদগুলো নিচে নিচে সাজিয়ে

আমরা পাই, $2y^2 - 3xy + x^2$

$- 4y^2 - 4xy + 2x^2$

যোগ করে, $- 2y^2 - 7xy + 3x^2$

$\therefore$ নির্ণেয় বিয়োগফল $= - 2y^2 - 7xy + 3x^2$

উদাহরণ ৭। $x^3 - 3x^2 + 6x$ থেকে $2x^3 - 4x^2 + 7x + 5$ বিয়োগ কর।

সমাধান : $x^3 - 3x^2 + 6x$

$2x^3 - 4x^2 + 7x + 5$

$(-) \quad (+) \quad (-) \quad (-)$

$- x^3 + x^2 - x - 5$

$\therefore$ নির্ণেয় বিয়োগফল $= - x^3 + x^2 - x - 5$.

নিয়ম : (i) বিয়োজন রাশিটি উপরে এবং বিয়োজ্য রাশি নিচে এমনভাবে লিখতে হবে যেন সদৃশ পদগুলো নিচে নিচে পড়ে।

(ii) বিয়োজ্যের পদগুলোর চিহ্ন বদলিয়ে যোগ করতে হবে। প্রয়োজনবোধে পরিবর্তিত চিহ্নগুলো নিচে নিচে লেখা যেতে পারে।

(iii) সদৃশ পদের সাংখ্য-সহগের যোগফলের পাশে সংশ্লিষ্ট পদের বীজগণিতীয় সংখ্যা-প্রতীক বসাতে হবে। এভাবে প্রাপ্ত সদৃশ পদের এবং অসদৃশ পদের যোগফল হল নির্ণেয় বিয়োগফল।

প্রশ্নমালা ১·২

প্রথম রাশি থেকে দ্বিতীয় রাশি বিয়োগ কর : (প্রশ্ন 1– 6)

1. $2x + 3y - 4z, \quad - x + y - z$.
2. $4a^2 - 6a + 5, \quad 7a^2 + 3a - 2$.
3. $a^2 - 5ab - 8b^2, \quad - 3a^2 + 2ab - 7b^2$.
4. $3ax - 7by - 7cz, \quad 7cz - 6by + 2ax$.
5. $10m^2 + 7mn - 12n^2, \quad 4n^2 + 8m^2 - 3mn$.
6. $4x^3 - 9x^2y - 10xy^2 + 7y^3, \quad 2x^3 - 5x^2y + 5xy^2 - 2y^3$.

সদৃশ পদগুলো নিচে নিচে সাজিয়ে বিয়োগ কর : (প্রশ্ন 7 – 13)

7. $5a^4 - 8a - 13a^2 + 9, \quad 4a - 3 - 11a^2 + 6a^4$.
8. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \quad a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
9. $9x^3 + 6x^2y + 5xy^2 + y^3 \quad 3x^3 + y^3$

10. $6x^2y - 8xy^2, 10x^3 + 3y^3 - 5x^2y + 3xy^2$.

11. $a^3 + b^3, 2a^3 + 2b^3 - 3a^2b + 3ab^2$.

12. $3x^5 + 6x^4y - 3x^2y^3 + 9y^5, 3y^5 + 3x^4y - 3x^2y^3 + x^5$.

13. $x^2 + y^2 + z^2, x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy$.

14. $7a^2 - 5ab + 8b^2$ থেকে $20a^2 + 9ab - 10b^2$ কত বেশি?

15. $x^3 - 6x^2 - 6x + 1$ এর সঙ্গে কত যোগ করলে যোগফল $3x^3 - 6x^2 - 13x + 11$ হবে?

16. $(x^3 + y^3)$ এবং $(7x^3 - 8y^3)$ এর যোগফলের সাথে কত যোগ করলে যোগফল $13x^3 + 13y^3$ হবে?

17. $x^3 + 3x^2y + 5xy^2 - 2y^3$ থেকে কত বিয়োগ করলে বিয়োগফল $9x^3$ হবে?

18. $A = 5x^3 - 3a^2x^2 + 4a^3$ এবং $B = 4x^3 - 3a^2x^2 + 3a^3$ হলে, প্রমাণ কর যে, $A - B = x^3 + a^3$.

১·৬। বীজগণিতীয় রাশিমালার গুণ

পাটিগণিতে কেবল ধনাত্মক সংখ্যা ব্যবহার করা হয়। কিন্তু বীজগণিতে ধনাত্মক সংখ্যা ছাড়াও ঋণাত্মক সংখ্যা এবং সংখ্যা–সূচক প্রতীক ব্যবহার করতে হয়। এজন্য গুণন ও ভাগ প্রক্রিয়ায় কাজ করতে হলে কয়েকটি বিষয়ে আমাদের স্পষ্ট ধারণা থাকা প্রয়োজন। ইতোমধ্যে গুণের বিনিময় বিধি ও সংযোগ বিধি সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে।

নিচে আরও কয়েকটি বিষয়ে আলোচনা করা হল :

চিহ্নযুক্ত সংখ্যার গুণ

আমরা জানি, $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$ অর্থাৎ 1 কে 5 বার নিলে নির্দিষ্ট সংখ্যা 5 হয়। তদ্রূপ 3 কে 5 বার নিলে (3+3+3+3+3) বা 15 হয়।

যে প্রক্রিয়ায় 1 কে 5 এ পরিণত করা যায়, ঐ প্রক্রিয়া 3 এ প্রয়োগ করলে বলা হয় যে 3 কে 5 দ্বারা গুণ করা হয়েছে।

অর্থাৎ, $3 \times 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$.

সাধারণভাবে, $\boxed{a \times b = ab}$

সুতরাং, $(-3) \times 5 = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -15$.

সাধারণভাবে, $\boxed{-a \times b = -(a \times b) = -ab}$

আবার, $(-1) + (-1) + (-1) = -3$

অর্থাৎ, 1 এর যোগাত্মক বিপরীত -1 কে 3 বার নিলে নির্দিষ্ট সংখ্যা (-3) হয়।

$\therefore 5 \times (-3) = (-5) + (-5) + (-5) = -15$, [যেহেতু 5 এর যোগাত্মক বিপরীত (-5)]

সাধারণভাবে, $\boxed{a \times (-b) = -(a \times b) = -ab}$

$(-p) \times (-q) = -\{(-p) \times q\}$ $\quad [\because a \times (-b) = -(a \times b)]$

$= -\{-(p \times q)\}$ [$\because$ $(-a \times b) = -(a \times b)$]

$= p \times q$ [$\because$ $-a$ এর যোগাত্মক বিপরীত a]

অর্থাৎ, $(-p) \times (-q) = p \times q = pq$

একই চিহ্নযুক্ত দুইটি সংখ্যার গুণফল (+) চিহ্নযুক্ত সংখ্যা হবে। আবার বিপরীত চিহ্নযুক্ত দুইটি সংখ্যার গুণফল (–) চিহ্নযুক্ত হবে।

সূচক সম্পর্কীয় নিয়ম

আমরা জানি,

$a \times a = a^2, a \times a \times a = a^3$

$a^2 \times a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a) = a^5 = a^{2+3}$

সাধারণভাবে, $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (m ও n এর প্রত্যেকে স্বাভাবিক সংখ্যা)

আবার, $(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^6 = a^{2 \times 3}$

সাধারণভাবে, $(a^m)^n = a^{mn}$

বণ্টন বিধি

আমরা জানি, $3(a + b) = (a + b) + (a + b) + (a + b)$

$= (a + a + a) + (b + b + b) = 3a + 3b$

সাধারণভাবে, $x(a + b + c + d + \ldots\ldots\ldots\ldots)$

$= xa + xb + xc + xd + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

এ নিয়মকে গুণনের বণ্টন বিধি বলা হয়।

উদাহরণ ৮। $5a^3b^2$ কে $4a^4b^3$ দ্বারা গুণ কর।

সমাধান : $(5a^3b^2 \times 4a^4b^3)$

$= (5 \times 4) \times (a^3 \times a^4) \times (b^2 \times b^3)$, [গুণনের বিনিময় ও সংযোগ বিধি অনুযায়ী]

$= 20a^7b^5$ [সূচক নিয়ম অনুযায়ী]

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $= 20a^7b^5$

উদাহরণ ৯। $-3a^2b^2c$ কে $4a^2b^2$ দ্বারা গুণ কর।

সমাধান : $(-3a^2b^2c) \times 4a^2b^2$

$= (-3) \times 4 \times a^2 \times a^2 \times b^2 \times b^2 \times c$

$= -12a^4b^4c$

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $= -12a^4b^4c$.

উদাহরণ ১০। $-3x^2y^2z^2$ কে $-5a^2x^3y^3$ দ্বারা গুণ কর।

সমাধান : $(-3x^2y^2z^2) \times (-5a^2x^3y^3)$

$= (-3) \times (-5) \times a^2 \times x^2 \times x^3 \times y^2 \times y^3 \times z^2$

$= 15a^2x^5y^5z^2.$

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $= 15a^2x^5y^5z^2.$

উদাহরণ ১১। $-2m^3 + 3m^2n - 5mn^2$ কে $4mn$ দ্বারা গুণ কর।

সমাধান : $(-2m^3 + 3m^2n - 5mn^2) \times 4mn$

$= -2m^3 \times 4mn + 3m^2n \times 4mn - 5mn^2 \times 4mn$ [বণ্টন বিধি অনুযায়ী]

$= -8m^4n + 12m^3n^2 - 20m^2n^3.$

$\therefore$ নির্ণেয় গুণফল $= -8m^4n + 12m^3n^2 - 20m^2n^3.$

বহুপদী রাশিকে বহুপদী রাশি দ্বারা গুণ :

$(a + b) \times (c + d)$

$= (a+ b) \times p,$ [$p= c + d$ ধরে]

$= a \times p + b \times p,$ [বণ্টন বিধি অনুযায়ী]

$= a \times (c + d) + b \times (c + d),$ [যেহেতু $p = c + d$ ধরা হয়েছে]

$= a \times c + a \times d + b \times c + b \times d.$

অর্থাৎ,

প্রথম রাশির পদগুলো দ্বারা দ্বিতীয় রাশির পদগুলোকে আলাদাভাবে গুণ করা হয়েছে। এভাবে প্রাপ্ত গুণফলের বীজগণিতীয় যোগফলই নির্ণেয় গুণফল।

উদাহরণ ১২। $a^2 + 2ab + b^2$ কে $a + b$ দ্বারা গুণ কর।

সমাধান : $a^2 + 2ab + b^2$ ⟶ গুণ্য

$a + b$ ⟶ গুণক

$a^3 + 2a^2b + ab^2$ ⟶ a দ্বারা গুণ করে

$a^2b + 2ab^2 + b^3$ ⟶ b দ্বারা গুণ করে

যোগ করে, $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

নির্ণেয় গুণফল $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

নিয়ম : (i) প্রথমে গুণকের প্রথম পদ দ্বারা গুণ্যের প্রত্যেক পদকে গুণ করে গুণফল লিখতে হবে।

(ii) এরপর গুণকের দ্বিতীয় পদ দ্বারা গুণ্যের পদগুলোকে গুণ করে গুণফল বের করতে হবে। এ গুণফলকে এমনভাবে লিখতে হবে যেন উভয় গুণফলের সদৃশ পদগুলো নিচে নিচে পড়ে।

(iii) প্রাপ্ত দুইটি গুণফলের বীজগণিতীয় সমষ্টি হল নির্ণেয় গুণফল।

প্রশ্নমালা ১·৩

১ম রাশিকে ২য় রাশি দ্বারা গুণ কর : (প্রশ্ন 1–26)

1. $2a^2, 3ab.$
2. $6ab, -9b^2.$
3. $5a^2x^2, 2ax^5y.$
4. $2ax^2, -7a^3x.$
5. $-3bx^2, 10b^3x^2yz.$
6. $-3p^2q^3, -5p^5q^4.$
7. $-4abxy, -8a^3x^4by^2.$
8. $-14xy^4, -5x^4yz.$
9. $7a^3xy^5z^2, -2z^5x^3a^2y^4.$
10. $2x-3y, 4xy.$
11. $2a^2-3b^2-c^2, abc.$
12. $-2c^2d+3d^3c-5cd^2, -6c^2d^4$
13. $a^3-b^3+3abc, a^4b.$
14. $x+5, x+4.$
15. $a+b, a-b.$
16. $a+b-c, b+c.$
17. $5x-8y, 2x-7y.$
18. $x^2+2x-3, x+4.$
19. $a^2-ab+b^2, 3a+4b.$
20. $a^2-2ab+b^2, a-b.$
21. x^4+y^4, x^4-y^4
22. $x^2+2ax+a^2, x+a.$
23. $4p^2-4pq+q^2, 2p-q.$
24. $x^2-x+1, 1+x+x^2.$
25. a^2+ab+b^2, b^2-ab+a^2
26. $x+y+z, x+y+z.$
27. $A = x^2+xy+y^2$ এবং $B = x-y$ হলে, প্রমাণ কর যে, $AB = x^3-y^3.$
28. দেখাও যে, $(x+1)(x-1)(x^2+1) = x^4-1.$

১·৭। বীজগণিতীয় রাশিমালার ভাগ

চিহ্নযুক্ত সংখ্যার ভাগ :

আমরা জানি, $a \times (-b) = (-a) \times b = -ab.$

সুতরাং, $-ab \div a = a \times (-b) \div a = -b$

অনুরূপভাবে, $-ab \div b = -a$

$-ab \div (-a) = b$

$-ab \div (-b) = a.$

সদৃশ চিহ্নযুক্ত দুইটি সংখ্যার ভাগফল (+) চিহ্নযুক্ত সংখ্যা এবং অসদৃশ চিহ্নযুক্ত দুইটি সংখ্যার ভাগফল (–) চিহ্নযুক্ত সংখ্যা হবে।

মন্তব্য : উভয় সংখ্যা (+) চিহ্নযুক্ত বা (–) চিহ্নযুক্ত হলে, সংখ্যা দুইটিকে পরস্পর সদৃশ চিহ্নযুক্ত সংখ্যা বলা হয়। আবার একটি সংখ্যা (+) চিহ্নযুক্ত এবং অপর সংখ্যাটি (–) চিহ্নযুক্ত হলে, সংখ্যা দুইটিকে পরস্পর অসদৃশ চিহ্নযুক্ত সংখ্যা বলা হয়।

ভাগের সূচক নিয়ম

$a^5 \div a^3 = \frac{a^5}{a^3} = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = a \times a$, [লব ও হর থেকে সাধারণ উৎপাদক বর্জন করে]

অর্থাৎ, $a^5 \div a^3 = a \times a = a^2 = a^{5-3}, a \neq 0.$

সাধারণভাবে, $a^m \div a^n = a^{m-n}$, যেখানে m ও n স্বাভাবিক সংখ্যা এবং $m > n, a \neq 0.$

অনুসিদ্ধান্ত : $a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0, a \neq 0.$

আবার, $a^m \div a^m = \frac{a^m}{a^m} = 1, a \neq 0.$

$$\boxed{\therefore\ a^0 = 1, a \neq 0}$$

উদাহরণ ১৩। $15a^4b^7$ কে $5a^2b^4$ দ্বারা ভাগ কর।

সমাধান : নির্ণেয় ভাগফল $= \frac{15a^4b^7}{5a^2b^4}$

$$= \frac{15}{5} \cdot \frac{a^4}{a^2} \cdot \frac{b^7}{b^4}$$

$$= 3a^{4-2} \,.\, b^{7-4} = 3a^2b^3$$

উদাহরণ ১৪। $-12x^{13}y^9z^3$ কে $-3x^4y^5z^2$ দ্বারা ভাগ কর।

সমাধান : নির্ণেয় ভাগফল $= \frac{-12x^{13}y^9z^3}{-3x^4y^5z^2}$

$$= \frac{-12}{-3} \,.\, x^{13-4} \,.\, y^{9-5} \,.\, z^{3-2}$$

$$= 4x^9y^4z.$$

বহুপদী রাশিকে একপদী রাশি দ্বারা ভাগ :

আমরা জানি, $(5 + 15 + 20) \div 5 = 40 \div 5 = 8$

যেহেতু $5 \div 5 = 1, 15 \div 5 = 3, 20 \div 5 = 4,$

$$\therefore\ 5 \div 5 + 15 \div 5 + 20 \div 5 = 1 + 3 + 4 = 8$$

সুতরাং, $(5 + 15 + 20) \div 5 = (5 \div 5) + (15 \div 5) + (20 \div 5)$

সাধারণভাবে, $(a + b + c) \div d = (a \div d) + (b \div d) + (c \div d)$

অর্থাৎ $\frac{a+b+c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$

এটিকে বলা হয় ভাগের বণ্টন বিধি।

উদাহরণ ১৫। $6a^3x^2 - 10a^2x^3 + 8ax^4$ কে $2ax$ দ্বারা ভাগ কর।

সমাধান : নির্ণেয় ভাগফল $= \dfrac{6a^3x^2 - 10a^2x^3 + 8ax^4}{2ax}$

$= \dfrac{6a^3x^2}{2ax} + \dfrac{-10a^2x^3}{2ax} + \dfrac{8ax^4}{2ax}$ [ভাগের বণ্টন বিধি অনুযায়ী]

$= 3a^2x - 5ax^2 + 4x^3.$

বহুপদী রাশিকে বহুপদী রাশি দ্বারা ভাগ

যোগ-বিয়োগের বিনিময় বিধি অনুযায়ী $5a^2x + 3ax^3 - 2a^3x^2$ কে $3ax^3 - 2a^3x^2 + 5a^2x$ লেখা যায়।

আবার $5a^2x + 3ax^3 - 2a^3x^2$ কে $5a^2x - 2a^3x^2 + 3ax^3$ লেখা যায়।

লক্ষ করি : * প্রথম ক্ষেত্রে রূপান্তরিত রাশির প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় পদে x এর শক্তির সূচক যথাক্রমে 3, 2, 1.

* দ্বিতীয় ক্ষেত্রে রূপান্তরিত রাশির প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় পদে x এর শক্তির সূচক যথাক্রমে 1, 2, 3.

প্রথম ক্ষেত্রে আমরা বলি রাশিটিকে x এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজানো হয়েছে। দ্বিতীয় ক্ষেত্রে রাশিটিকে x এর শক্তির উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজানো হয়েছে।

নিয়ম : (i) ভাজ্য ও ভাজকের উভয়ের মধ্যে আছে এমন একটি বীজগণিতীয় প্রতীকের শক্তির উর্ধ্বক্রম বা অধঃক্রম অনুসারে রাশিদ্বয়কে সাজাতে হবে। এরপর পাটিগণিতের ভাগ-প্রক্রিয়ার মতো রাশিদ্বয়কে পাশাপাশি বসিয়ে ভাগ করতে হবে।

(ii) ভাজ্যের প্রথম পদটিতে ভাজকের প্রথম পদ দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগফল হয় তা নির্ণেয় ভাগফলের প্রথম পদ।

(iii) ভাগফলের ঐ প্রথম পদ দ্বারা ভাজকের প্রত্যেক পদকে গুণ করে গুণফল ভাজ্য থেকে বিয়োগ করতে হবে।

(iv) বিয়োগফল নতুন ভাজ্য হবে। বিয়োগফল এমনভাবে লিখতে হবে যেন তা আগের মতো অধঃক্রম বা উর্ধ্বক্রম অনুসারে থাকে।

(v) নতুন ভাজ্যের প্রথম পদটিকে ভাজকের প্রথম পদ দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগফল হয় তা নির্ণেয় ভাগফলের দ্বিতীয় পদ।

উদাহরণ ১৬। $10x^2 + 29x - 21$ কে $2x + 7$ দ্বারা ভাগ কর।

সমাধান : দুইটি রাশিই x এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজানো আছে।

$2x + 7\ )\ 10x^2 + 29x - 21\ (5x - 3$

$10x^2 + 35x$

$-6x - 21$

$-6x - 21$

0

$10x^2 \div 2x = 5x$

$-6x \div 2x = -3.$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল $= 5x - 3.$

উদাহরণ ১৭। $a^{16} - 3a^8 + 1$ কে $a^8 - a^4 - 1$ দ্বারা ভাগ কর।

সমাধান : রাশি দুইটি a এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজানো আছে।

$$
\begin{array}{l|l}
\begin{array}{r}
a^8 - a^4 - 1\,)\; a^{16} - 3a^8 + 1 \;(a^8 + a^4 - 1 \\
\underline{a^{16} - a^8 - a^{12}} \\
a^{12} - 2a^8 + 1 \\
\underline{a^{12} - a^8 - a^4} \\
- a^8 + a^4 + 1 \\
\underline{- a^8 + a^4 + 1} \\
0
\end{array}
&
\begin{array}{l}
a^{16} \div a^8 = a^8; \\
a^{12} \div a^8 = a^4; \\
- a^8 \div a^8 = -1
\end{array}
\end{array}
$$

নির্ণেয় ভাগফল = $a^8 + a^4 - 1$.

মন্তব্য : নতুন ভাজ্যকেও আগের মতো a এর শক্তির অধঃক্রম বা উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজাতে হবে।

প্রশ্নমালা ১.৪

প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি দ্বারা ভাগ কর : (প্রশ্ন 1 – 35)

1. $16x^4, 4x^2$.
2. $-27a^6, 3a^3$.
3. $-15x^{12}, -5x^6$.
4. $-30a^4x^3, 6a^2x$.
5. $-18a^3z^3y^2, -6ayz$.
6. $26p^2q^2r^2, -13pq$.
7. $5x^{12}y^9q^4, -x^9y^2q^4$.
8. $-22x^2yz, -2xyz$.
9. $50x^4y^6z, -10x^4zy^5$.
10. $-35xy^3a^5b^4, -7a^4b^2xy^2$.
11. $3a^3b^2 - 2a^2b^3, a^2b^2$.
12. $6a^5b^3 - 9a^3b^4, 3a^2b^2$.
13. $a^3b^4 - 3a^7b^7, -a^3b^3$.
14. $x^2yz + xy^2z + xyz^2, -xyz$.
15. $15a^3x - 20a^2x^2 + 10ax^3, -5ax$.
16. $8p^4q^2 - 16p^3q^3 - 20p^2q^4, -4p^2q^2$.
17. $3x^6 - 9x^2y + 12xy^3, -3x$.
18. $21a^2b^2c - 12a^4b^4c^4 - 9a^2b^6c^2, -3ab^2$.
19. $9m^3n^4 - 21m^2n^5 - 12m^4n^3, 3m^2n^3$,
20. $x^3 + 3x^4y^5 - 5x^3y^4z^2, 5x^3$.
21. $a^3b^2 + 2a^2b^3, a + 2b$.
22. $x^2 - 9x + 14, x - 7$.
23. $12a^2 - 8a - 32, 4a - 8$.
24. $2x^2 - 7xy + 6y^2, x - 2y$.
25. $x^2 - 8xy + 16y^2, x - 4y$.
26. $a^2 + 4axyz + 4x^2y^2z^2, a + 2xyz$.
27. $x^4 - 1, x^2 + 1$.
28. $x^4y^4 - 1, x^2y^2 + 1$.
29. $25x^2 - 9y^2, 5x - 3y$.
30. $x^2 - 8abx + 15a^2b^2, x - 3ab$.
31. $x^4 + 8x^2 + 15, x^2 + 5$.
32. $2a^2b^2 + 5abd + 3d^2, ab + d$.
33. $x^4 + x^2 + 1, x^2 - x + 1$.
34. $4a^4 + b^4 - 5a^2b^2, 4a^2 - b^2$.
35. $81p^4 + q^4 - 22p^2q^2, 9p^2 + 2pq - q^2$.

১.৮। বীজগণিতীয় রাশিমালার বন্ধনী স্থাপন ও অপসারণ

বন্ধনী অপসারণ

আমরা জানি, $5 + (7 - 2) = 5 + 5 = 10$ এবং $5 + 7 - 2 = 12 - 2 = 10$

$\therefore 5 + (7 - 2) = 5 + 7 - 2.$

সাধারণভাবে, $a + (b - c) = a + b - c.$

লক্ষ করি : * বন্ধনীর আগে (+) চিহ্ন আছে।

* বন্ধনীর অপসারণের পর বন্ধনীর ভিতরের পদগুলোর চিহ্নের পরিবর্তন হয়নি।

সুতরাং, বন্ধনীর আগে (+) চিহ্ন থাকলে বন্ধনী অপসারণে বন্ধনীর ভিতরের কোনো পদের চিহ্নের পরিবর্তন হয় না।

আবার, $10 - (8 - 2) = 10 - 6 = 4$ এবং $10 - 8 + 2 = 2 + 2 = 4$

$10 - (8 - 2) = 10 - 8 + 2.$

সাধারণভাবে, $a - (b - c) = a - b + c.$

লক্ষ করি : * বন্ধনীর আগে (–) চিহ্ন আছে।

* বন্ধনী অপসারণের পর বন্ধনীর ভিতরের পদগুলোর চিহ্নের পরিবর্তন হয়ে বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয়েছে।

সুতরাং, বন্ধনীর আগে (–) চিহ্ন থাকলে বন্ধনী অপসারণে বন্ধনীর ভিতরের সব পদের চিহ্নের পরিবর্তন হবে। অর্থাৎ (+) চিহ্নযুক্ত পদ (–) চিহ্নযুক্ত এবং (–) চিহ্নযুক্ত পদ (+) চিহ্নযুক্ত হবে।

আমরা আগেই জেনেছি, $a + (b - c) = a + b - c.$

অর্থাৎ, $a + b - c = a + (b - c);$

তদ্রুপ $a - b + c = a - (b - c)$

লক্ষ করি : * প্রথম ক্ষেত্রে বন্ধনীর আগে (+) চিহ্ন দিয়ে পদগুলো বন্ধনীভুক্ত করা হয়েছে। এতে প্রত্যেক পদের স্ব স্ব চিহ্ন ঠিক রয়েছে।

* দ্বিতীয় ক্ষেত্রে বন্ধনীর আগে (–) চিহ্ন দিয়ে পদগুলো বন্ধনীভুক্ত করা হয়েছে। এতে প্রত্যেক পদের স্ব স্ব চিহ্ন পরিবর্তিত হয়েছে।

সুতরাং, (+) চিহ্ন দিয়ে রাশির যেসব পদ বন্ধনীভুক্ত করা হয়, তাদের স্ব স্ব চিহ্ন ঠিক থাকে। আবার (–) চিহ্ন দিয়ে যে রাশির যেসব পদ বন্ধনীভুক্ত করা হয়, তাদের স্ব স্ব চিহ্ন বিপরীত চিহ্নযুক্ত করে নিতে হয়।

উদাহরণ ১৮। সরল কর : $a + [b - \{c - d - (e - f + g)\}]$

সমাধান : $a + [b - \{c - d - (e - f + g)\}]$

$= a + [b - \{c - d - e + f - g\}]$

$= a + [b - c + d + e - f + g]$

$= a + b - c + d + e - f + g.$

মন্তব্য : পাটিগণিতের মতো পর্যায়ক্রমে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় বন্ধনীর কাজ করতে হয়।

উদাহরণ ১৯। সরল কর : $2x - [3x + \{4y - (2x - y) + 5x - 7y\}]$

সমাধান : $2x - [3x + \{4y - (2x - y) + 5x - 7y\}]$

$= 2x - [3x + \{4y - 2x + y + 5x - 7y\}]$

$= 2x - [3x + \{3x - 2y\}] = 2x - [3x + 3x - 2y]$

$= 2x - [6x - 2y] = 2x - 6x + 2y = -4x + 2y.$

প্রশ্নমালা ১·৫

সরল কর : (প্রশ্ন 1 – 12)

1. $a - \{b - (c - d)\}$
2. $x - \{a - (x - a)\}$
3. $x - \{2x - (3y - 4x + 2y)\}$
4. $3x + (4y - z) - [a - b - (2c - 4a) - 5a]$
5. $-a - [-3b - \{-2a - (-a - 4b)\}]$
6. $a - [2b - \{3c - (a - 2b + 3c)\}]$
7. $3x - [5y - \{10z - (5x - 10y + 3z)\}]$
8. $-2a - [-4b - \{-6c - (-8a + 10b + 12c)\}]$
9. $\{2a - (3b - 5c)\} - [a - \{2b - (c - 4a)\} - 7c]$
10. $-2x - [-4y - \{-6z - (8x - 10y + 12z)\}]$
11. $-a + [-6b - \{-15c + (-3a - 9b - 13c)\}]$
12. $-5 - [-8 - \{-4 - (-2 - 3)\} + 13]$
13. বন্ধনীর আগে (–) চিহ্ন দিয়ে $x + y - a + b$ এর ২য়, ৩য় ও ৪র্থ পদ প্রথম বন্ধনীর ভিতরে স্থাপন কর।
14. নিচের রাশিমালায় বন্ধনীর আগে (–) চিহ্ন দিয়ে প্রথম তিনটি পদ ও (+) চিহ্ন দিয়ে দ্বিতীয় দুইটি পদ বন্ধনীভুক্ত কর :

    $-a + b - c + d - e.$
15. $3x - 4y - 8z + 5$ এর তৃতীয় ও চতুর্থ পদ বন্ধনীর আগে (–) চিহ্ন দিয়ে প্রথম বন্ধনীভুক্ত কর। পরবর্তীতে দ্বিতীয় পদ ও প্রথম বন্ধনীভুক্ত রাশিকে দ্বিতীয় বন্ধনীভুক্ত কর যেন বন্ধনীর আগে (–) চিহ্ন থাকে।
16. $10 - 7 + 3 - 4 + 8$ রাশিটির চতুর্থ ও পঞ্চম পদকে প্রথম বন্ধনীভুক্ত কর যেন বন্ধনীর আগে (–) চিহ্ন থাকে। প্রথম বন্ধনীভুক্ত রাশি এবং তৃতীয় পদকে দ্বিতীয় বন্ধনীভুক্ত কর যেন বন্ধনীর আগে (–) চিহ্ন থাকে। এবার দ্বিতীয় বন্ধনীভুক্ত রাশি এর দ্বিতীয় পদকে তৃতীয় বন্ধনীভুক্ত কর যেন বন্ধনীর আগে (–) চিহ্ন থাকে। এখন প্রাপ্ত রাশিটি সরল কর।

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। $3a + 2b - c$ এবং $2c - 2a - b$ এর সমষ্টি নিচের কোনটি ?

ক. $a + 2b + c$ খ. $a + b + c$

গ. $2a + b + c$ ঘ. $a + b + 2c$

২। $4ax - 5by + 3cz$ থেকে $3ax - 6by + 2cz$ বিয়োগ করলে বিয়োগফল নিচের কোনটি ?

ক. $ax + by + cz$ খ. $7ax - 11by + 5cz$

গ. $ax - 11by + cz$ ঘ. $ax - by + cz$

৩। $18a^5b^2$ কে $3a^3$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল নিচের কোনটি ?

ক. $6ab^2$ খ. $6a^2b$

গ. $6a^2b^2$ ঘ. $6a^3b^2$

৪। $2a^2b$ এবং $-5a\,b^2$ এর গুণফল কোনটি ?

ক. $-10\,a^2b^2$ খ. $-10\,a^3b^2$

গ. $-10\,a^2b^3$ ঘ. $-10a^3b^3$

৫। $a = -1$ হলে, $a^3 + 2a^2 - 1$ এর সঠিক মান নিচের কোনটি ?

ক. -2 খ. -1

গ. 0 ঘ. 1

৬। $a - \{b - (c - d)\}$ এর সরলীকৃত ফল নিচের কোনটি ?

ক. $a - b + c + d$ খ. $a - b + c - d$

গ. $a - b - c - d$ ঘ. $a - b - c + d$

৭। $8a^6b^5c^4$ কে $-2a^2b^2c^2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল হবে কোনটি?

ক. $-4a^4b^2c^3$ খ. $-4a^4b^3c^2$

গ. $-4a^3b^3c^3$ ঘ. $-4a^4b^3c^3$

৮। xy রাশিটিতে xy এর সহগ নিচের কোনটি ?

ক. 1 খ. 0

গ. x ঘ. y

৯। x এর যোগাত্মক বিপরীত সংখ্যা নিচের কোনটি ?

ক. x খ. $-x$

গ. $1/x$ ঘ. -1

১০। নিচের কোন জোড়া সদৃশ পদ ?

ক. $5abx^2,\ 3x^2ab$ খ. $2x^2y,\ 3xy^2$

গ. $5ab^2,\ 7ab$ ঘ. $10a^3b,\ 10ab^3$

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। $(15x^2 + 7x - 2)$ এবং $(5x - 1)$ দুইটি বীজগণিতীয় রাশি।
   ক. রাশিদ্বয়ের সমষ্টি বের কর।
   খ. প্রথম রাশিটিকে দ্বিতীয় রাশি দ্বারা ভাগ করে ভাগফল লেখ।
   গ. রাশিদ্বয়ের গুণফল নির্ণয় কর।

২। তিনটি রাশি হল $(a - 3)$, $(a + 3)$ এবং $(a^2 + 2)$
   ক. প্রথম রাশি থেকে দ্বিতীয় রাশিটি বিয়োগ কর।
   খ. প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির গুণফলের সাথে তৃতীয় রাশিটির যোগফল বের কর।
   গ. $a = 3$ হলে, প্রদত্ত রাশি তিনটির গুণফলের মান নির্ণয় কর।

৩। $2x + y$, $3x - z$ এবং $x - 4y - 3z + 2$ তিনটি বীজগণিতীয় রাশি।
   ক. তৃতীয় রাশির ক্ষেত্রে বন্ধনীর আগে $(+)$ চিহ্ন দিয়ে প্রথম দুইটি পদ এবং $(-)$ চিহ্ন দিয়ে পরবর্তী পদগুলো বন্ধনীভুক্ত কর।
   খ. প্রথম রাশির দ্বিগুণের সাথে দ্বিতীয় রাশির তিনগুণ বিয়োগ কর।
   গ. $7 + [(2x + y) - \{(3x - z) - (x - 4y - 3z + 2) + 10\}]$ কে সরল কর।

৪। $5a^2b$, $-15a^3b$ এবং $20a^4b - 10a^3b^2 + 15a^2b^4$ তিনটি বীজগণিতীয় রাশি।
   ক. দ্বিতীয় রাশিকে প্রথম রাশি দ্বারা গুণ কর।
   খ. তৃতীয় রাশিকে প্রথম রাশি দ্বারা ভাগ কর।
   গ. $a = 1$ এবং $b = 2$ হলে, উল্লিখিত তিনটি রাশির যোগফল নির্ণয় কর।

৫। a দ্বারা গঠিত দুইটি রাশি হচ্ছে $a^6 - a^3 - 2$ এবং $15 + 2a^{12} - 10a^6$.
   ক. দ্বিতীয় রাশিকে a এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজিয়ে লেখ।
   খ. প্রথম রাশিকে $(a^2)^3$ দ্বারা গুণ কর।
   গ. দ্বিতীয় রাশিকে প্রথম রাশি দ্বারা ভাগ করে ভাগফল ও ভাগশেষ বের কর।

দ্বিতীয় অধ্যায়

প্রথম চারটি সূত্র ও প্রয়োগ

২·১। বীজগণিতীয় সূত্রের সংজ্ঞা

আমরা জানি ভাগের ক্ষেত্রে, ভাজ্য = ভাজক * ভাগফল + ভাগশেষ। সব সংখ্যার ক্ষেত্রে এটি সত্য। অর্থাৎ এটি স্বীকৃত সিদ্ধান্ত। এখন ভাজ্য, ভাজক, ভাগফল ও ভাগশেষকে যথাক্রমে N, D, Q ও R ধরলে, $N = DQ + R$.

উপরের সম্পর্কটি একটি বীজগণিতীয় সূত্র।

বীজগণিতীয় প্রতীকের সাহায্যে সাধারণভাবে প্রকাশিত কোনো সিদ্ধান্তকে বীজগণিতীয় সূত্র বা সংক্ষেপে সূত্র বলা হয়।

২·২। প্রথম চারটি সূত্র

এ অধ্যায়ে বীজগণিতের প্রথম চারটি সূত্রের উল্লেখ করা হল।

সূত্র ১। $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

প্রমাণ : $(a + b)^2$ এর অর্থ $(a + b)\ (a + b)$

$$\begin{aligned}\therefore\ (a + b)^2 &= (a + b)\ (a + b)\\ &= a\ (a + b) + b\ (a + b)\\ &= a^2 + ab + ab + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

অর্থাৎ, দুইটি রাশির যোগফলের বর্গ = ১ম রাশির বর্গ + ২ * ১ম রাশি * ২য় রাশি + ২য় রাশির বর্গ।

অনুসিদ্ধান্ত ১। $a^2 + b^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - 2ab$

$$= (a + b)^2 - 2ab$$

সূত্র ২। $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

প্রমাণ : $$\begin{aligned}(a - b)^2 &= (a - b)\ (a - b)\\ &= a\ (a - b) - b\ (a - b)\\ &= a^2 - ab - ab + b^2\\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

অর্থাৎ, দুইটি রাশির বিয়োগফলের বর্গ = ১ম রাশির বর্গ − ২ * ১ম রাশি * ২য় রাশি + ২য় রাশির বর্গ।

মন্তব্য : $$\begin{aligned}(a - b)^2 &= \{a + (-b)\}^2\\ &= a^2 + 2.a.\ (-b) + (-b)^2\\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

অর্থাৎ, দ্বিতীয় সূত্রটি প্রথম সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত ২। $a^2 + b^2 = (a^2 - 2ab + b^2) + 2ab$

$= (a - b)^2 + 2ab.$

প্রথম ও দ্বিতীয় সূত্রের সাহায্যে কয়েকটি অনুসিদ্ধান্ত :

অনুসিদ্ধান্ত ৩। $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$= a^2 + b^2 - 2ab + 4ab \quad [\because 2ab = -2ab + 4ab]$

$= (a - b)^2 + 4ab.$

অনুসিদ্ধান্ত ৪। $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \quad [\because -2ab = 2ab - 4ab]$

$= (a + b)^2 - 4ab.$

অনুসিদ্ধান্ত ৫। $(a + b)^2 + (a - b)^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2$

$= 2a^2 + 2b^2$

অনুসিদ্ধান্ত ৬। $(a + b)^2 - (a - b)^2$

$= (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)$

$= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2$

$= 4ab.$

উদাহরণ ১। $5x + 3y$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

সমাধান : $(5x + 3y)^2$

$= (5x)^2 + 2.5x.3y + (3y)^2$

$= 25x^2 + 30xy + 9y^2$

উদাহরণ ২। $9a - b$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

সমাধান : $(9a - b)^2$

$= (9a)^2 - 2.9a.b + b^2$

$= 81a^2 - 18ab + b^2$

উদাহরণ ৩। 999 এর বর্গ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\because 999 = 1000 - 1$

$\therefore (999)^2 = (1000 - 1)^2$

$= (1000)^2 - 2 * 1000 * 1 + (1)^2$

$= 1000000 - 2000 + 1$

$= 998001.$

উদাহরণ ৪। $a + b + c$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

সমাধান : $(a + b + c)^2$

$= \{a + (b + c)\}^2$

$= a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2$

$= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$

মন্তব্য : a + b + c

চিত্রে প্রদর্শিত নিয়মে দুইটি রাশির গুণফলের প্রত্যেকটির দ্বিগুণ এবং প্রত্যেক রাশির বর্গের সমষ্টি হল $(a + b + c)^2$. জটিল সমস্যা সমাধানের ক্ষেত্রে এ নিয়মটি অনুসরণ করা সুবিধাজনক।

উদাহরণ ৫। $3x - 5y + 2z$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

সমাধান : $\because 3x - 5y + 2z = 3x - (5y - 2z)$

$\therefore (3x - 5y + 2z)^2$

$= \{3x - (5y - 2z)\}^2$

$= (3x)^2 - 2.3x(5y - 2z) + (5y - 2z)^2$, [$\because$ ১ম রাশি $= 3x$, ২য় রাশি $= 5y - 2z$]

$= 9x^2 - 30xy + 12zx + (5y)^2 - 2.5y.2z + (2z)^2$

$= 9x^2 - 30xy + 12zx + 25y^2 - 20yz + 4z^2$

$= 9x^2 + 25y^2 + 4z^2 - 30xy + 12zx - 20yz$, [সাজিয়ে]

উদাহরণ ৬। সরল কর :

$(5x + 4y)^2 - 2(5x + 4y)(3y + 5x) + (3y + 5x)^2$.

সমাধান : $5x + 4y$ এর পরিবর্তে a এবং $3y + 5x$ এর পরিবর্তে b ধরে

প্রদত্ত রাশি $= a^2 - 2ab + b^2$

$= (a - b)^2$

$= \{(5x + 4y) - (3y + 5x)\}^2$ [a ও b এর মান বসিয়ে]

$= \{5x + 4y - 3y - 5x\}^2$

$= y^2.$

উদাহরণ ৭। $a = 15$ এবং $b = 6$ হলে, $9a^2 - 48ab + 64b^2$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= 9a^2 - 48ab + 64b^2$

$= (3a)^2 - 2.3a.8b + (8b)^2$

$= (3a - 8b)^2$

$= (3 * 15 - 8 * 6)^2$

$= (45 - 48)^2 = (-3)^2 = (-3) * (-3) = 9.$

উদাহরণ ৮। $a + b = 7$ এবং $ab = 24$ হলে, $a^2 + b^2$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$
$= (7)^2 - 2 * 24$
$= 49 - 48$
$= 1.$

উদাহরণ ৯। $x - \frac{1}{x} = 9$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 83$

সমাধান : $x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2$

$= \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2x \cdot \frac{1}{x}$
$= (9)^2 + 2$
$= 81 + 2$
$= 83.$ (প্রমাণিত)

প্রশ্নমালা ২·১

নিচের রাশিগুলোর বর্গ নির্ণয় কর : (প্রশ্ন 1 – 19)

1. $2a + 3$
2. $5x + 2y$
3. $9x + 5a$
4. $3m + 7n$
5. $5a - 7$
6. $3x - 7y$
7. $ax - by$
8. $3a - 11xy$
9. $5a^2 + 9m^2$
10. $9x^2 - 11y^2$
11. 99
12. 1005
13. 997
14. $a - b + c$
15. $a + 2b + 3c$
16. $2x + y - z$
17. $bc + ca + ab$
18. $x^2 + y^2 - z^2$
19. $a^2 + 2b - c^2$.

সরল কর : (প্রশ্ন 20 – 24)

20. $(a + b)^2 - 2(a + b)(a - b) + (a - b)^2$
21. $(2x + 3y)^2 + 2(2x + 3y)(2x - 3y) + (2x - 3y)^2$
22. $(2a - 3b + 4c)^2 + (2a + 3b - 4c)^2 + 2(2a - 3b + 4c)(2a + 3b - 4c)$
23. $(5a - 7b)^2 + 2(5a - 7b)(9b - 4a) + (9b - 4a)^2$
24. $(2a + 5b + 3c)^2 + (5b + 3c - a)^2 - 2(5b + 3c - a)(2a + 5b + 3c)$

মান নির্ণয় কর : (প্রশ্ন 25 – 28)

25. $9x^2 + 30x + 25$, যখন $x = -2$.
26. $4x^2 - 28xy + 49y^2$, যখন $x = 7, y = 2$.
27. $16a^2 - 40ab + 25b^2$, যখন $a = 7, b = 6$.

28. $81x^2 + 18xz + z^2$, যখন $x = 7, z = -67$.

29. $m + \frac{1}{m} = 4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $m^2 + \frac{1}{m^2} = 14$.

30. $a - \frac{1}{a} = 5$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a^2 + \frac{1}{a^2} = 27$.

31. $m + \frac{1}{m} = p$ হলে, $m^2 + \frac{1}{m^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

32. $a + b = 5$ এবং $ab = 12$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a^2 + b^2 = 1$.

33. $a + b = 8$ এবং $a - b = 4$ হলে, ab এর মান নির্ণয় কর।

34. $x + \frac{1}{x} = 3$ হলে, প্রমাণ কর যে, $x^4 + \left(\frac{1}{x}\right)^4 = 47$.

35. $a + b = 7$ এবং $ab = 10$ হলে, $a^2 + b^2 + 5ab$ এর মান নির্ণয় কর।

সূত্র ৩। $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

প্রমাণ : $(a + b)(a - b)$

$= a(a - b) + b(a - b)$

$= a^2 - ab + ab - b^2$

$= a^2 - b^2$

অর্থাৎ, দুইটি রাশির যোগফল * এদের বিয়োগফল = রাশি দুইটির বর্গের বিয়োগফল।

সূত্র ৪। $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

প্রমাণ : $(x + a)(x + b)$

$= (x + a)x + (x + a)b$

$= x^2 + ax + bx + ab$

$= x^2 + (a + b)x + ab$.

অর্থাৎ, $(x + a)(x + b)$

$= x^2 +$ (a এবং b এর বীজগণিতীয় যোগফল) x + (a এবং b এর গুণফল)

অনুসিদ্ধান্ত ১। $(x + a)(x - b)$

$= x^2 + (a - b)x + (a)(-b)$

$= x^2 + (a - b)x - ab$.

অনুসিদ্ধান্ত ২। $(x - a)(x + b)$

$= x^2 + (-a + b)x + (-a)(b)$

$= x^2 + (b - a)x - ab$.

অনুসিদ্ধান্ত ৩। $(x - a)(x - b)$
$= x^2 + (-a - b)x + (-a)(-b)$
$= x^2 - (a + b)x + ab.$

উদাহরণ ১০। সূত্রের সাহায্যে $2x + 3$ কে $2x - 3$ দ্বারা গুণ কর।

সমাধান : $(2x + 3)(2x - 3)$
$= (2x)^2 - (3)^2$
$= 4x^2 - 9$

উদাহরণ ১১। $(2x + 3y + 1)(2x - 3y + 1)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $(2x + 3y + 1)(2x - 3y + 1)$
$= \{(2x + 1) + 3y\}\{(2x + 1) - 3y\}$
$= (2x + 1)^2 - (3y)^2$
$= (2x)^2 + 2.2x.1 + 1 - 9y^2$
$= 4x^2 + 4x + 1 - 9y^2$
$= 4x^2 - 9y^2 + 4x + 1.$ [সাজিয়ে]

উদাহরণ ১২। $x + 3a$ কে $x + 7a$ দ্বারা গুণ কর।

সমাধান : রাশিদ্বয়ের উভয়ের প্রথম পদ x এবং এদের দ্বিতীয় পদ যথাক্রমে $3a$ এবং $7a$.
$\therefore (x + 3a)(x + 7a)$
$= x^2 + (3a + 7a)x + (3a)(7a)$
$= x^2 + 10ax + 21a^2.$

উদাহরণ ১৩। $3a^2 - 7$ কে $3a^2 - 9$ দ্বারা গুণ কর।

সমাধান : $(3a^2 - 7)(3a^2 - 9)$
$= (3a^2)^2 + (-7 - 9)3a^2 + (-7)(-9)$
$= 9a^4 - 48a^2 + 63.$

প্রশ্নমালা ২·২

সূত্রের সাহায্যে প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি দ্বারা গুণ কর : (প্রশ্ন 1 – 15)

1. $4x + 3, 4x - 3.$
2. $5a + 8b, 5a - 8b.$
3. $4a + 7b, 4a - 7b.$
4. $13 - 12p, 13 + 12p.$
5. $ax^2 + b, ax^2 - b.$
6. $a - b - c, a + b + c.$
7. $x^2 - x + 1, x^2 + x + 1.$
8. $4x^2 + 6x + 9, 4x^2 - 6x + 9.$
9. $1 + 4x^4 - 2x^2, 4x^4 + 2x^2 + 1.$
10. $a^4 + 3a^2x^2 + 9x^4, 9x^4 - 3a^2x^2 + a^4.$
11. $x + 16, x + 9.$
12. $px + 3, px - 5.$
13. $2x + 5, 2x + 8.$
14. $q^2x^2 + r, q^2x^2 + 3r.$
15. $x + \frac{2}{3}, x + \frac{1}{3}.$

সূত্রের সাহায্যে গুণফল নির্ণয় কর : (প্রশ্ন 16 – 18)

16. $\left(x - \frac{1}{3}a\right)\left(x + \frac{1}{3}a\right)$
17. $\left(\frac{1}{5}x + \frac{1}{6}y\right)\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{6}y\right)$
18. $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1).$

২.৩। বীজগণিতীয় রাশিমালার উৎপাদক

আমরা জানি, $15 = 3 * 5$

এখানে আমরা বলি, 15 এর দুইটি উৎপাদক বা গুণনীয়ক হল যথাক্রমে 3 এবং 5.

সূত্র ৩ থেকে আমরা জানি, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

তাহলে, বীজগণিতীয় রাশি $a^2 - b^2$ এর দুইটি উৎপাদক বা গুণনীয়ক হল যথাক্রমে $(a + b)$ এবং $(a - b)$

কোনো বীজগণিতীয় রাশি দুই বা ততোধিক রাশির গুণফল হলে, শেষোক্ত প্রত্যেক রাশিকে ঐ বীজগণিতীয় রাশির উৎপাদক বলা হয়।

বীজগণিতীয় রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা বলতে বোঝায় বীজগণিতীয় রাশির উৎপাদক নির্ণয় করা। গুণনের বিনিময়, সংযোগ ও বণ্টন বিধি এবং বীজগণিতীয় সূত্র ব্যবহার করে বীজগণিতীয় রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা হয়।

উৎপাদক নির্ণয়ে বিনিময়, সংযোগ ও বণ্টন বিধির প্রয়োগ :

উদাহরণ ১৪। $ax + ay$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান : $ax + ay$

$= a.x + a.y$

$= a(x + y)$. [গুণনের বণ্টন বিধি অনুযায়ী]

উদাহরণ ১৫। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^3 + 5x^2 + 3x + 15$.

সমাধান : $x^3 + 5x^2 + 3x + 15$

$= x^2.x + x^2.5 + 3.x + 3.5$

$= x^2(x + 5) + 3(x + 5)$ [গুণনের বণ্টন বিধি অনুযায়ী]

$= (x + 5)(x^2 + 3)$ [গুণনের বণ্টন বিধি অনুযায়ী]

মন্তব্য : দুইটি রাশি এমনভাবে নির্বাচন করতে হবে যেন বণ্টন বিধি প্রয়োগ করে প্রাপ্ত রাশি দুইটির মধ্যে একটি সাধারণ উৎপাদক পাওয়া যায়।

উৎপাদক নির্ণয়ে $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ সূত্রের প্রয়োগ :

উদাহরণ ১৬। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $81x^2 - 25$.

সমাধান : $81x^2 - 25$

$= (9x)^2 - (5)^2$

$= (9x + 5)(9x - 5)$

উদাহরণ ১৭ । উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $ax^4 - 4a$.

সমাধান : $ax^4 - 4a$

$= a.x^4 - a.4$

$= a(x^4 - 4)$ [বণ্টন বিধি অনুযায়ী]

$= a\{(x^2)^2 - (2)^2\}$

$= a(x^2 + 2)(x^2 - 2)$.

মন্তব্য : প্রয়োজনবোধে প্রথমে রাশিকে বণ্টন বিধি অনুযায়ী উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে নিতে হবে।

উদাহরণ ১৮। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $25(3a - 2b)^2 - 16(2a + 3b)^2$.

সমাধান : $3a - 2b = x$ এবং $2a + 3b = y$ ধরে,

প্রদত্ত রাশি $= 25x^2 - 16y^2$

$= (5x)^2 - (4y)^2$

$= (5x + 4y)(5x - 4y)$

$= \{5(3a - 2b) + 4(2a + 3b)\}\{5(3a - 2b) - 4(2a + 3b)$, [x ও y এর মান বসিয়ে]

$= (15a - 10b + 8a + 12b)(15a - 10b - 8a - 12b)$

$= (23a + 2b)(7a - 22b)$.

উদাহরণ ১৯। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^4 + x^2 + 1$.

সমাধান : $x^4 + x^2 + 1$.

$= (x^2)^2 + x^2 + (1)^2$

$= (x^2)^2 + (1)^2 + 2.x^2.1 - 2x^2 + x^2$

$= (x^2 + 1)^2 - (x)^2$

$= (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x)$

$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$. [সাজিয়ে]

নিয়ম : (i) প্রদত্ত রাশির দুইটি পদের বর্গের যোগফলের সঙ্গে ঐ পদ দুইটির গুণফলের দ্বিগুণ যোগ বা বিয়োগ করতে হবে। এতে দ্বিপদী রাশির পূর্ণবর্গ পাওয়া যায়।

(ii) যে রাশি যোগ বা বিয়োগ করা হয়েছে তা প্রদত্ত রাশি থেকে যথাক্রমে বিয়োগ ও যোগ করতে হবে।

উদাহরণ ২০। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $a^2 - 2bc - 2ab - c^2$

সমাধান : $a^2 - 2bc - 2ab - c^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 - b^2 - 2bc - c^2$ [b^2 যোগ ও বিয়োগ করে]

$=(a^2 - 2ab + b^2) - (b^2 + 2bc + c^2)$

$= (a - b)^2 - (b + c)^2$

$= \{(a - b) + (b + c)\} \{(a - b) - (b + c)\}$

$= a - b + b + c) (a - b - b - c)$

$= (a + c)(a - 2b - c)$

উপরের উদাহরণে লক্ষ করি :

★ $a^2 - 2ab$ এর সঙ্গে b^2 যোগ করা হয়েছে। এতে একটি পূর্ণ বর্গ রাশি পাওয়া গেছে।

★ রাশিতে b^2 যোগ করায় ঐটি বিয়োগ করতে হবে। এতে প্রদত্ত রাশির মানের পরিবর্তন হয় না।

উদাহরণ ২১। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^2 + 7x + 10$

সমাধান : $x^2 + 7x - 10$

$= x^2 + (5+2)x + 10$

$= x^2 + 5x + 2x + 10$

$= x(x + 5) + 2(x+5)$

$= (x+2)(x+5)$

নিয়ম : x এর সহগকে এমন দুইটি সংখ্যায় বিভক্ত করতে হবে যেন সংখ্যা দুইটির গুণফল তৃতীয় পদের সমান হয়। অর্থাৎ, সংখ্যা দুইটি a ও b হলে $a + b=7$এবং $ab = 10$

উদাহরণ ২২। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^2 + 5x - 6$

সমাধান : এখানে $a=6$ এবং $b = -1$ ধরলে,

$a + b = 6-1=5$ এবং $ab = 6(-1)= - 6$ হয়।

$\therefore x^2 + 5x - 6$

$= x^2 + (6 - 1)x + 6(-1)$

$= x^2 + 6x - x - 6$

$= x(x + 6) - 1(x+6)$

$= (x + 6) (x - 1)$

মন্তব্য : সরাসরি সূত্র প্রয়োগ না করে উপরের নিয়মে বীজগণিতীয় রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হবে।

প্রশ্নমালা ২.৩

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : (প্রশ্ন 1–34)

1. $xy + a^2x$.
2. $a^2bc + ab^2c + abc^2$.
3. $a^2 + bc + ca + ab$.
4. $x^2 - ax - bx + ab$.
5. $1 + a + a^2 + a^3$.
6. $ab(px + qy) + a^2qx + b^2py$.
7. $4ab - 10bc + 4ab - 10cd$.
8. $x^2 - 25$.
9. $4x^2 - y^2$.
10. $a^2 - 81b^2$.
11. $49 - a^2b^2$.
12. $a^2 - (x + y)^2$.
13. $x^2 - (b - c)^2$.
14. $80x^3 - 45x$.
15. $p^2 - \frac{1}{9}$.
16. $pq^3 - p^3q$.
17. $16x^4 - 81y^4$.
18. $\frac{1}{3}x^2 - 3$.
19. $25x^4 - 36y^4$.
20. $9(2a + 5x)^2 - 16(3a - x)^2$.
21. $(x^2 + 1)^2 - (y^2 + 1)^2$.
22. $144x^7 - 25x^3a^4$.
23. $64 - 9(x - y)^2$.
24. $4x^4 + 81$.
25. $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$.
26. $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$.
27. $4x^2 - 4xy + y^2 - z^2$.
28. $x^2 + 5x + 6$.
29. $x^2 + 11x + 30$.
30. $x^2 - 14x + 45$.
31. $a^2 + 3a - 40$.
32. $m^2 + m - 30$.
33. $a^2 - 6a - 91$.
34. $m^2 - 15m + 56$.

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। $p + \frac{1}{p} = 2$ হলে, $\frac{1}{p}$ এর সঠিক মান নিচের কোনটি ?

ক. 1 খ. 2

গ. – 1 ঘ. – 2

২। $x + \frac{1}{x} = 1$ এবং $x^2 - \frac{1}{x^2} = 0$ হলে, $(x - \frac{1}{x})$ এর সঠিক মান নিচের কোনটি ?

ক. –1 খ. 0

গ. 1 ঘ. 2

৩। $a + b = 3$ এবং $a^2 + b^2 = 1$ হলে, কোনটি ab এর সঠিক মান ?

ক. 1 খ. 3

গ. 4 ঘ. 8

৪। i. 999 এর বর্গ $(1000 - 1)^2$ না লেখা ভাল

ii. $4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2$

iii. $x + 1$ এবং $x - 1$ এর গুণফলকে $x^2 + (-1 + 1)x + (-1) \times (1)$ আকারে লেখা যায়

ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. i ও iii

গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে ৫ – ৭ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

বীজগাণিতিক রাশিগুলো লক্ষ কর :

i. $x^2 - 25$

ii. $x^2 + 4x - 5$

৫। $x = 1$ বসালে (i) এবং (ii) এর অন্তর নিচের কোনটি ?

ক. 0 খ. – 24

গ. 24 ঘ. 25

৬। (ii) এর উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ নিচের কোনটি ?

ক. $(x - 1)(x + 5)$ খ. $(x + 1)(x - 5)$

গ. $(-x + 1)(x + 5)$ ঘ. $(-x + 1)(5 - x)$

৭। (i) এবং (ii) এর সাধারণ উৎপাদক নিচের কোনটি ?

ক. $(x - 5)$ খ. $(x - 1)$

গ. $(x + 1)$ ঘ. $(x + 5)$

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। যদি $x + \frac{1}{x} = 2$ হয়, তবে

ক. দেখাও যে, $x^2 - 2x + 1 = 0$

খ. প্রমাণ কর যে, $x^2 - \frac{1}{x^2} = 0$

গ. $x^4 + \frac{1}{x^4}$ এর মান নির্ণয় কর।

২। $x + y = 4$ এবং $xy = 3$ হলে,

ক. $x - y$ এর বর্গ নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, $x^2 - y^2 = 10$.

গ. $(x - y)^2 + (x^2 - y^2)$ এর মান বের কর।

৩। নিচের বীজগাণিতিক রাশিগুলো লক্ষ কর:

i. $x^2 + 5x$

ii $x^2 + 7x + 10$

iii. $ax^4 - 625a$

ক. (i) কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

খ. সূত্র প্রয়োগে দেখাও যে, $(x + 5)$ এবং $(x + 2)$ এর গুণফল (ii) এর সমান।

গ. দেখাও যে, (iii) এর একটি উৎপাদক $(x - 5)$.

তৃতীয় অধ্যায়

বীজগণিতীয় রাশিমালার গ.সা.গু. ও ল.সা.গু.

৩.১। ভাজ্য, ভাজক, গুণিতক সম্পর্কে ধারণা

মনে করি, $a \div b = c$

a ↓ ভাজ্য, b ↓ ভাজক, c ↓ ভাগফল

উপরে একটি ভাগ প্রক্রিয়া দেখানো হয়েছে। যে রাশিকে ভাগ করা হয়, তাকে **ভাজ্য** বলে। যে রাশি দ্বারা ভাগ করা হয়, তাকে **ভাজক** বলে। ভাগফল c একটি পূর্ণ সংখ্যা হলে a, b দ্বারা নিঃশেষে **বিভাজ্য** বলা হয়। তখন a কে b এর একটি গুণিতক বলা হয়।

> একটি রাশি (ভাজ্য) অপর একটি রাশি (ভাজক) দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হলে, ভাজ্যকে ভাজকের একটি গুণিতক বলা হয়।

৩.২। গ.সা.গু.

abd এর গুণনীয়কগুলো যথাক্রমে a,b,d;

5a এর গুণনীয়কগুলো যথাক্রমে 5,a.

apq এর গুণনীয়কগুলো যথাক্রমে a,p,q.

$\therefore$ abd,5a,apq রাশিগুলোর **সাধারণ গুণনীয়ক** a.

> যে রাশি দুই বা ততোধিক রাশির প্রত্যেকটির গুণনীয়ক, ঐ রাশিকে প্রদত্ত রাশিগুলোর সাধারণ গুণনীয়ক বলা হয়।

পাটিগণিত থেকে আমরা জানি,

$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$

12 ও 24 এর গ.সা.গু. $= 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$.

লক্ষ করি : * মৌলিক গুণনীয়ক 2, 3 এর প্রত্যেকে 12 ও 24 এর সাধারণ গুণনীয়ক।

* 2 সর্বোচ্চ 2 বার অর্থাৎ 2 এর সর্বোচ্চ শক্তি 2^2 এবং 3 সর্বোচ্চ 1 বার উভয় সংখ্যায় অন্তর্ভুক্ত রয়েছে।

সুতরাং সংখ্যাদ্বয়ের গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (গ.সা.গু) $= 2^2 \times 3$.

দুই বা ততোধিক রাশির অন্তর্গত সর্বোচ্চ-সংখ্যক সাধারণ মৌলিক গুণনীয়কের ধারাবাহিক গুণফলকে ঐ রাশিগুলোর গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক বলে।

গ.সা.গু. নির্ণয়ের নিয়ম :

(i) পাটিগণিতের নিয়মে রাশিগুলোর সাংখ্যা-সহগের গ.সা.গু. নির্ণয় করতে হবে।

(ii) বীজগণিতীয় রাশিগুলোর মৌলিক উৎপাদক বের করতে হবে।

(iii) প্রদত্ত রাশিগুলোর সর্বোচ্চ-সংখ্যক বীজগণিতীয় সাধারণ মৌলিক উৎপাদকগুলোর এবং সাংখ্য-সহগের গ.সা.গু. এর ধারাবাহিক গুণফল হচ্ছে নির্ণেয় গ.সা.গু.।

উদাহরণ ১। $6a^2bc$ এবং $8a^3b^2c^2$. এর গ.সা.গু. নির্ণয় কর।

সমাধান : $6a^2bc = 6 \times a^2 \times b \times c$

$8a^3b^2c^2 = 8 \times a^3 \times b^2 \times c^2$

এখানে সাংখ্য-সহগ 6 ও 8 এর গ.সা.গু. = 2

a এর সর্বোচ্চ শক্তি, যা দুইটি রাশির মধ্যে আছে তাহল a^2

b এর ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, b

c এর ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, c

∴ নির্ণেয় গ.সা.গু. = $2 \times a^2 \times b \times c = 2a^2bc$.

মন্তব্য : a, 2 বার আছে বলতে বোঝায় a এর সর্বোচ্চ শক্তি a^2.

উদাহরণ ২। $3(a^2 - b^2)$ এবং $(a^2 + 2ab + b^2)$ এর গ.সা.গু. নির্ণয় কর।

সমাধান : ১ম রাশি = $3(a^2 - b^2) = 3(a+b)(a-b)$

২য় রাশি = $(a^2 + 2ab + b^2) = (a+b)^2$

সাংখ্য-সহগ 3 ও 1 এর গ.সা.গু. = 1

সাধারণ মৌলিক উৎপাদক (a+b) এর সর্বোচ্চ শক্তি (a+b)

∴ নির্ণেয় গ.সা.গু. = (a+b)

উদাহরণ ৩। $x^2 - 9, x^2 + 7x + 12$ এবং $3x+9$ এর গ.সা.গু. নির্ণয় কর।

সমাধান : ১ম রাশি = $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

২য় রাশি = $x^2 + 7x + 12 = x^2 + (4 + 3)x + 3 \times 4$

$= x^2 + 4x + 3x + 12 = x(x + 4) + 3(x + 4)$

$= (x + 3)(x + 4)$

৩য় রাশি = $3x + 9 = 3(x + 3)$

সাংখ্য-সহগ 1,1 এবং 3 এর গ.সা.গু. = 1

সাধারণ মৌলিক উৎপাদক (x + 3) এর সর্বোচ্চ শক্তি (x + 3)

∴ নির্ণেয় গ.সা.গু. = (x + 3)

উদাহরণ ৪। $16x^2 - 9y^2, 4x^2 + 3xy$ এবং $16x^2 + 9y^2 + 24xy$ এর গ.সা.গু. নির্ণয় কর।

সমাধান : ১ম রাশি = $16x^2 - 9y^2 = (4x)^2 - (3y)^2 = (4x + 3y)(4x - 3y)$

২য় রাশি = $4x^2 + 3xy = x(4x + 3y)$

৩য় রাশি = $16x^2 + 9y^2 + 24xy = (4x)^2 + (3y)^2 + 2.4x.3y = (4x + 3y)^2$

$\therefore$ নির্ণেয় গ.সা.গু = $4x + 3y$

৩.৩ । ল.সা.গু.

আমরা জানি, $x^2y^2 \div xy^2 = x$

$x^2y^2 \div x^2y = y$

অর্থাৎ, xy^2 ও x^2y এর প্রত্যেকটি দ্বারা x^2y^2 নিঃশেষে বিভাজ্য। সুতরাং x^2y^2 হল xy^2 ও x^2y এর একটি সাধারণ গুণিতক।

তদ্রুপ, x^3y^2, x^3y^3, x^2y^3 ইত্যাদি xy^2 ও x^2y এর সাধারণ গুণিতক।

আবার, $xy^2 = x \times y^2$

$x^2y = x^2 \times y$

অর্থাৎ, দুইটি বীজগণিতীয় রাশি xy^2 ও x^2y এর অন্তর্ভুক্ত মৌলিক উৎপাদকগুলো হল x এবং y. এখন সাধারণ গুণিতকে x এর শক্তি কমপক্ষে x^2 উৎপাদক হিসেবে বর্তমান থাকলে ঐটি x^2, x এর প্রত্যেকটি দ্বারা বিভাজ্য হবে।

আবার সাধারণ গুণিতকে y এর শক্তি কমপক্ষে y^2 উৎপাদক হিসেবে থাকলে ঐটি y^2, y এর প্রত্যেকটি দ্বারা বিভাজ্য হবে।

অর্থাৎ, রাশি দুইটির সাধারণ গুণিতকে কমপক্ষে x^2 ও y^2 উৎপাদক হিসেবে বর্তমানে থাকবে।

$\therefore$ রাশি দুইটির লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক = x^2y^2.

দুই বা ততোধিক রাশির মধ্যে সাধারণ গুণিতকের সবচেয়ে ছোট গুণিতকটিকে লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক বা সংক্ষেপে ল.সা.গু. বলে।

ল.সা.গু নির্ণয় করার জন্য প্রথমে সংখ্যা-সহগগুলোর ল.সা.গু. বের করতে হবে। এরপর সাধারণ উৎপাদকের সর্বোচ্চ শক্তি বের করতে হবে। এখন উভয়ের গুণফলই হবে প্রদত্ত রাশিগুলোর ল.সা.গু.।

উদাহরণ ৫। a^2b, b^2c এবং abc^3 এর ল.সা.গু. নির্ণয় কর।

সমাধান : $a^2b = a^2 \times b$

$b^2c = b^2 \times c$

$abc^3 = a \times b \times c^3$

এখানে রাশি তিনটির মধ্যে a, b, c এ তিনটি উৎপাদক আছে। এদের মধ্যে a এর সর্বোচ্চ শক্তি a^2, b এর সর্বোচ্চ শক্তি b^2, c এর সর্বোচ্চ শক্তি c^3

$\therefore$ নির্ণেয় ল.সা.গু. = $a^2b^2c^3$.

উদাহরণ ৬। $6a^2bcd$, $15ab^3c^2d^5$ এবং $3b^2c^2d^3$ এর ল.সা.গু. নির্ণয় কর।

সমাধান : সাংখ্য-সহগ 6, 15, 3 এর ল.সা.গু. 30

রাশিগুলোর অন্তর্ভুক্ত a, b, c, d উৎপাদকগুলোর সর্বোচ্চ শক্তি যথাক্রমে a^2, b^3, c^2, d^5.

$\therefore$ নির্ণেয় ল.সা.গু. $= 30\ a^2b^3c^2d^5$.

মন্তব্য : সাংখ্য-সহগের ল.সা.গু. আলাদাভাবে নির্ণয় করতে হবে।

উদাহরণ ৭। $3x^2 + 9$, $x^4 - 9$ এবং $x^4 + 6x^2 + 9$ এর ল.সা.গু. নির্ণয় কর।

সমাধান : ১ম রাশি = $3x^2 + 9 = 3(x^2 + 3)$

২য় রাশি = $x^4 - 9 = (x^2)^2 - (3)^2 = (x^2 + 3)(x^2 - 3)$

৩য় রাশি = $x^4 + 6x^2 + 9 = (x^2)^2 + 2.x^2.3 + (3)^2 = (x^2 + 3)^2$

সাংখ্য–সহগ 3, 1, 1 এর ল.সা.গু. = 3

$(x^2 + 3), (x^2 - 3)$ এর সর্বোচ্চ শক্তি যথাক্রমে $(x^2 + 3)^2, (x^2 - 3)$

$\therefore$ নির্ণেয় ল.সা.গু. $= 3(x^2 + 3)^2, (x^2 - 3)$

উদাহরণ ৮। $x^2 - 8x + 15$, $x^2 - 25$, এবং $x^2 + 2x - 15$ এর ল.সা.গু. নির্ণয় কর।

সমাধান : ১ম রাশি = $x^2 - 8x + 15 = x^2 + (-5-3)x + (-5)(-3)$

$= x^2 - 5x - 3x + 15 = x(x-5) - 3(x-5)$

$= (x-5)(x-3)$

২য় রাশি = $x^2 - 25 = (x)^2 - (5)^2 = (x+5)(x-5)$

৩য় রাশি = $x^2 + 2x - 15 = x^2 + (5-3)x + 5(-3)$

$= x^2 + 5x - 3x - 15 = x(x+5) - 3(x+5)$

$= (x+5)(x-3)$

$\therefore$ নির্ণেয় ল.সা.গু. $= (x-5)(x+5)(x-3) = (x^2 - 25)(x-3)$.

প্রশ্নমালা ৩

গ.সা.গু. নির্ণয় কর (প্রশ্ন 1–12)

1. x^3y^5, xy^4.
2. $3a^3b^2, 2a^2b^3$.
3. $4a^4x^7, 6a^5x^4$.
4. $3xyz^2, 2x^2yz^2, x^2y^2z$.
5. $16a^3x^4y, 40a^2y^3x, 28ax^3$.
6. $a^2 + ab, a^2 - b^2$.
7. $a^3 - ab^2, a^4 + 2a^3b + a^2b^2$.
8. $4a^4x - 9a^2x^3, 4a^2x^2 + 6ax^3$.
9. $x^2 + 7x + 12, x^2 + 9x + 20$.
10. $x^2 - x - 20, x^2 - 9x + 20$.
11. $x^2 + 3x + 2, x^2 - 4$.
12. $xy - y, x^3y - xy, x^2 - 2x + 1$.

ল.সা.গু. নির্ণয় কর (প্রশ্ন 13–24)

13. $2a^2b, 3ab^2c$.
14. $4a^2cx^3, 6ac^4x^2$.
15. $13c^3d^2, 26acd^4, 39c^5d$.
16. $4ab, 9a^2c, 12b^3$.
17. $2a^3b^2, 3ax^3, 5ax^2y^2z^2$.
18. $3x^2, 4x^2 + 8x$.
19. $x^2 + 2x, x^2 + 3x + 2$.
20. $x^2 + 10x + 21, x^4 - 49x^2$.
21. $9x^2 - 25y^2, 15ax - 25ay$.
22. $x^2 - 3x - 10, x^2 - 10x + 25$.
23. $ax^2 + 2a, x^4 - 4, x^4 + 4x^2 + 4$.
24. $a^2 - 7a + 12, a^2 + a - 20, a^2 + 2a - 15$.

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। i. ল. সা. গু. এর পূর্ণ রূপ হল লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক
ii. গ. সা. গু. এর পূর্ণ রূপ হল গরিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক
iii. সাধারণ গুণনীয়ক হল, রাশিগুলোর প্রত্যেকটির গুণনীয়ক।

ওপরের তথ্য অনুসারে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii
গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

২। x^3y^5 ও xy^4 এর গ. সা. গু. নিচের কোনটি ?

ক. xy খ. xy^4
গ. x^3y^5 ঘ. x^4y^9

৩। $4a^2cx^3$ ও $6ac^4x^2$ এর ল. সা. গু. নিচের কোনটি ?

ক. $2acx$ খ. $12a^2c^4x^3$
গ. $24a^3c^5x^5$ ঘ. $3ac^3x$

৪। একটি রাশি অপর একটি রাশি দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হলে, ভাজ্যকে ভাজকের কী বলা হয়?

ক. ভাগশেষ খ. গুণনীয়ক
গ. গুণিতক ঘ. ভাগফল

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে ৫ - ৭ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

$a^2 + ab$, $a^2 - b^2$ দুইটি বীজগাণিতিক রাশি।

৫। রাশি দুইটির গ. সা. গু. নিচের কোনটি ?

ক. b খ. a^2
গ. $a + b$ ঘ. $a - b$

৬। প্রথম রাশিতে $(a + b)$ এর গুণনীয়ক কত ?

ক. a খ. $a - b$
গ. $a(a + b)$ ঘ. $a(a - b)$

৭। রাশি দুইটির ল. সা. গু. নিচের কোনটি ?

ক. a^2 খ. $a(a + b)$
গ. $a(a - b)$ ঘ. $a(a + b)(a - b)$

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। $a^2b,\ a^3b + 3a^2b + 2ab,\ a^4 + 2a^3 + a^2$ তিনটি বীজগাণিতিক রাশি।

ক. প্রথম রাশিতে b এর গুণনীয়ক কত ?

খ. তৃতীয় রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

গ. রাশিগুলোর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

২। $4(a^2 - b^2), 2(a^2 + 2ab + b^2)$, $6(a^2b + ab^2), 2(a^4 - b^4)$ চারটি বীজগাণিতিক রাশি।

ক. রাশি চারটির সাংখ্য সহগের গ. সা. গু. কত ?

খ. প্রথম ও দ্বিতীয় রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

গ. রাশি চারটির গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

৩। $x^4 - 16,\ x^2 - 3x - 10$ দুইটি বীজগাণিতিক রাশি।

ক. প্রথম রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হলে কোন সূত্রটি ব্যবহার করতে হবে ?

খ. দ্বিতীয় রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

গ. রাশি দুইটির ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

চতুর্থ অধ্যায়

বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ

পাটিগণিতে আমরা ভগ্নাংশের আলোচনা করেছি। $\frac{5}{16}$ একটি ভগ্নাংশ, যার লব 5 এবং হর 16। এ নির্দিষ্ট সংখ্যার পরিবর্তে বীজগণিতীয় প্রতীক a ও b ব্যবহার করলে $\frac{a}{b}$ পাওয়া যায়। $\frac{a}{b}$ কে বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ বলা হয়। আবার কেবল 16 এর পরিবর্তে b ব্যবহার করে আমরা পাই $\frac{5}{b}$, এটিও একটি বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ। তদ্রুপ কেবল লব বা হর বীজগণিতীয় রাশি হলে, তাকেও বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ বলা হয়। যেমন,

$\frac{x^2+2}{x+2}$, $\frac{1}{x+1}$, $\frac{x+5}{3}$ ইত্যাদি।

মন্তব্য : $(a \div b)$ কে বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ $\frac{a}{b}$ লেখা হয়।

৪.১। ভগ্নাংশের লঘুকরণ

0 বাদে যে-কোনো রাশি দ্বারা ভগ্নাংশের লব ও হরকে গুণ বা ভাগ করলে ভগ্নাংশের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না। কোনো ভগ্নাংশের লব ও হরের মধ্যে কোনো সাধারণ গুণনীয়ক বা উৎপাদক না থাকলে ভগ্নাংশটিকে **লঘিষ্ঠ আকারের ভগ্নাংশ** বলা হয়।

উদাহরণ ১। $\frac{4a^2b^3c^3}{10ab^4c^3}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ কর।

সমাধান : $\frac{4a^2b^3c^3}{10ab^4c^3} = \frac{2ab^3c^3 \times 2a}{2ab^3c^3 \times 5b} = \frac{2a}{5b}$

মন্তব্য : লব ও হরের গ.সা.গু. দ্বারা ভাগ করা হয়েছে।

উদাহরণ ২। $\frac{a^2+2a}{a^2-4}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ কর।

সমাধান : লব $= a^2 + 2.a = a(a+2)$

হর $= a^2 - 4$

$= (a)^2 - (2)^2$

$= (a+2)(a-2)$

$\therefore$ প্রদত্ত ভগ্নাংশ $= \frac{a(a+2)}{(a+2)(a-2)}$

$= \frac{a}{a-2}$ [লব ও হরকে সাধারণ উৎপাদক (a+2) দ্বারা ভাগ করে।]

প্রশ্নমালা ৪.১

লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ কর : (প্রশ্ন 1–13)

1. $\frac{3a}{6ab}$.
2. $\frac{3abc}{15a^2b^2c}$.
3. $\frac{x^3y^2z^2}{x^2y^3z^3}$.
4. $\frac{38k^2p^3m^4}{57k^3p^3m^3}$.
5. $\frac{46x^4y^5z^9}{69x^2y^3z^{12}}$
6. $\frac{x^2-9}{ax+3a}$
7. $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$.
8. $\frac{x^2+7x+12}{x^2+x-12}$.
9. $\frac{4x^2-9a^2}{4x^2+6ax}$.
10. $\frac{3x^2-12xy}{48y^2-3x^2}$.
11. $\frac{a^2+2a-15}{a^2+9a+20}$.
12. $\frac{x^2-5x-14}{x^2-4x-21}$.
13. $\frac{4-81x^2}{9x^4-2x^3}$.

৪.২। ভগ্নাংশকে সাধারণ হরবিশিষ্টকরণ

মনে করি, $\frac{a}{b}$ এবং $\frac{c}{d}$ দুইটি বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ।

এখানে ভগ্নাংশ দুইটির হর b, d এর ল.সা.গু. =bd

এখন, $\frac{a}{b}=\frac{a\times d}{b\times d}$, [যেহেতু $bd \div b = d$]

$=\frac{ad}{bd}$

এবং $\frac{c}{d}=\frac{c\times b}{d\times b}$, [যেহেতু $bd \div d = b$]

$=\frac{bc}{bd}$

নির্ণেয় একই হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশ দুইটি $\frac{ad}{bd}$ এবং $\frac{bc}{bd}$।

নিয়ম : (i) ভগ্নাংশের হরগুলোর ল.সা.গু. নির্ণয় করতে হবে।

(ii) প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলোর কোনোটির হর দ্বারা ল.সা.গু.-কে ভাগ করতে হবে। ঐ ভাগফল দ্বারা সংশ্লিষ্ট ভগ্নাংশের লব ও হরকে গুণ করতে হবে।

উদাহরণ ৩। $\frac{x}{x+1}$ এবং $\frac{y}{x-1}$ কে লঘিষ্ঠ সমহরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান : প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলোর হর (x+1) এবং (x–1) এর ল. সা. গু. = (x+1) (x–1)

$\therefore \frac{x}{x+1}=\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x(x-1)}{x^2-1}$ [$\because$ $(x+1)(x-1)\div(x+1)=(x-1)$]

এবং $\frac{y}{x-1}=\frac{y(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{y(x+1)}{x^2-1}$ [$\because$ $(x+1)(x-1)\div(x-1)=(x+1)$]

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ দুইটি $\frac{x(x-1)}{x^2-1}$ এবং $\frac{y(x+1)}{(x^2-1)}$

উদাহরণ ৪। $\frac{1}{x^2+3x+2}$ এবং $\frac{x}{x^2-1}$ কে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিণত কর।

সমাধান : ১ম ভগ্নাংশের হর = $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$

২য় ভগ্নাংশের হর = $x^2-1 = (x+1)(x-1)$

$\therefore$ হরগুলোর ল. সা. গু. = $(x+1)(x+2)(x-1)$

প্রাপ্ত ল. সা. গু.-কে প্রত্যেকটির হর দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল যথাক্রমে $(x-1)$, $(x+2)$

$$\therefore \frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{x-1}{(x+1)(x+2)(x-1)} = \frac{x-1}{(x^2-1)(x+2)}$$

এবং $$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x(x+2)}{(x+1)(x-1)(x+2)} = \frac{x(x+2)}{(x^2-1)(x+2)}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশ দুইটি $\frac{x-1}{(x^2-1)(x+2)}$ এবং $\frac{x(x+2)}{(x^2-1)(x+2)}$

প্রশ্নমালা ৪·২

লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে প্রকাশ কর : (প্রশ্ন 1–10)

1. $\frac{a}{2b}, \frac{3c}{4d}$
2. $\frac{a}{bc}, \frac{b}{ca}, \frac{c}{ab}$
3. $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}$
4. $\frac{x}{x-y}, \frac{y}{x+y}, \frac{z}{x(x+y)}$
5. $\frac{x^2}{a^2+2ab}, \frac{y^2}{a-2b}$
6. $\frac{2x}{a^2(a+x)}, \frac{3y}{b^2(a-x)}, \frac{4z}{c^2(a^2-x^2)}$
7. $\frac{3}{a^2-a-2}, \frac{5}{a^2+a-6}$
8. $\frac{x}{x^2-9}, \frac{y}{x^2+2x-15}$
9. $\frac{1}{a^2+3a}, \frac{b}{a^2+5a+6}, \frac{c}{a^2-a-12}$
10. $\frac{x}{4x^2-25y^2}, \frac{y}{2ax+5ay}, \frac{z}{2x-5y}$

৪.৩। ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগ এবং সরলীকরণ

ভাগের বণ্টন বিধি অনুযায়ী আমরা পাই,

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x} - \frac{c}{x}$$

$$= (a \div x) + (b \div x) - (c \div x)$$

$$= (a+b-c) \div x$$

$$= \frac{a+b-c}{x}$$

লক্ষ করি : উপরের তিনটি ভগ্নাংশের হর x. অর্থাৎ এরা সাধারণ হরবিশিষ্ট। আবার তিনটি ভগ্নাংশের বীজগণিতীয় সমষ্টি একটি ভগ্নাংশ।

বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগের নিয়ম :

(i) প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলোকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করে নিতে হবে।

(ii) রূপান্তরিত ভগ্নাংশগুলোর (সাধারণ হরবিশিষ্ট) লবের যোগফল বা বিয়োগফল নির্ণেয় ভগ্নাংশের লব হবে। আর লঘিষ্ঠ সাধারণ হরই হল নির্ণেয় ভগ্নাংশের হর।

উদাহরণ ৫। $\frac{3}{x}$ এর সঙ্গে $\frac{2}{x}$ যোগ কর।

সমাধান : $\frac{3}{x}+\frac{2}{x}=\frac{3+2}{x}=\frac{5}{x}$

উদাহরণ ৬। $\frac{a+b}{a-b}$ এর সঙ্গে $\frac{a-b}{a+b}$ যোগ কর।

সমাধান : প্রদত্ত ভগ্নাংশের হর $(a+b), (a-b)$ এর ল. সা. গু $= (a+b)\,(a-b)$.

১ম ভগ্নাংশ $=\frac{a+b}{a-b}=\frac{(a+b)^2}{(a-b)\,(a+b)}$ [সাধারণ হরবিশিষ্ট করে]

২য় ভগ্নাংশ $=\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a-b)^2}{(a+b)\,(a-b)}$ [সাধারণ হরবিশিষ্ট করে]

$\therefore\ \frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2}{(a+b)\,(a-b)}+\frac{(a-b)^2}{(a+b)\,(a-b)}$

$=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a+b)\,(a-b)}=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$

উদাহরণ ৭। $\frac{x+a}{x-a}$ থেকে $\frac{4ax}{x^2-a^2}$ বিয়োগ কর।

সমাধান : $\frac{x+a}{x-a}-\frac{4ax}{x^2-a^2}$

$=\frac{x+a}{x-a}-\frac{4ax}{(x+a)\,(x-a)}$

$=\frac{(x+a)^2}{(x-a)\,(x+a)}-\frac{4ax}{(x+a)\,(x-a)}$ [সাধারণ হরবিশিষ্ট করে]

$=\frac{(x+a)^2-4ax}{(x-a)\,(x+a)}$

$=\frac{(x-a)^2}{(x+a)\,(x-a)}$ [বীজগণিতীয় সূত্রের অনুসিদ্ধান্ত অনুযায়ী]

$=\frac{x-a}{x+a}$ [লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ কর]

ভগ্নাংশের সরলীকরণ :

প্রক্রিয়া চিহ্নযুক্ত দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশকে একটি বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ বা একটি রাশিতে পরিণত করা যায়। একেই ভগ্নাংশের সরলীকরণ বলা হয়।

উদাহরণ ৮। সরল কর : $\frac{x^2}{ab}+\frac{(x+a)^2}{a(a-b)}-\frac{(x+b)^2}{b(a-b)}$

সমাধান : হরগুলোর ল. সা. গু.= ab(a–b)

প্রদত্ত রাশি $=\frac{x^2}{ab}+\frac{(x+a)^2}{a(a-b)}-\frac{(x+b)^2}{b(a-b)}$

$=\frac{x^2(a-b)}{ab(a-b)}+\frac{b(x+a)^2}{ab(a-b)}-\frac{a(x+b)^2}{ab(a-b)}$ [সাধারণ হরবিশিষ্ট করে]

$=\frac{x^2(a-b)+b(x+a)^2-a(x+b)^2}{ab(a-b)}$

$=\frac{ax^2-bx^2+bx^2+2abx+a^2b-ax^2-2abx-ab^2}{ab(a-b)}$

$=\frac{a^2b-ab^2}{ab(a-b)}$

$=\frac{ab(a-b)}{ab(a-b)}=1.$

প্রশ্নমালা ৪.৩

সরল কর : (প্রশ্ন 1 – 20)

1. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$
2. $\frac{3x^3}{a}+\frac{2y}{b}$
3. $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$
4. $\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}$
5. $\frac{x+y}{x}+\frac{x-y}{y}$
6. $\frac{a+b}{b}-\frac{a-b}{a}$
7. $\frac{x^2+y^2}{xy}-\frac{x^2-y^2}{xy}$
8. $\frac{a-b-c}{a}+\frac{a+b+c}{a}$
9. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}$
10. $\frac{3}{a+3}-\frac{2}{a+2}$
11. $\frac{1}{a+3}-\frac{1}{a^2-9}$
12. $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}$
13. $\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ca}+\frac{a-b}{ab}$
14. $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a-b}$
15. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{2(a+b)}$
16. $\frac{1}{x^2+7x+12}+\frac{1}{x+4}$
17. $\frac{5}{x^2-6x+5}+\frac{1}{x-1}$
18. $\frac{3}{x^2-4x-5}-\frac{4}{x+1}$
19. $\frac{3x}{4x^2-9y^2}+\frac{1}{2x+3y}$
20. $\frac{2a}{a^2-4b^2}+\frac{a}{2b^2+ab}$

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। নিচের কোনটি লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশিত ভগ্নাংশ ?

ক. $\frac{a^2 + a}{a + 1}$ খ. $\frac{a + b}{a - b}$

গ. $\frac{x^2 y^3}{x^3 y^2}$ ঘ. $\frac{x^2 - 9}{ax + 3a}$

২। $\frac{3}{x} - \frac{4}{x} + \frac{2}{x}$ এর মান নিচের কোনটি ?

ক. $-\frac{1}{x}$ খ. $\frac{1}{x}$

গ. $\frac{6}{x}$ ঘ. $\frac{14}{x}$

৩। $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ এর মান কত?

ক. 1 খ. 0

গ. $a^2 - b^2$ ঘ. $\frac{a^2 - b^2}{ab}$

৪। $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ এবং $\frac{a - b}{2(a + b)}$ ভগ্নাংশদ্বয়ের হরগুলোর ল. সা. গু. নিচের কোনটি ?

ক. $2(a^2 - b^2)$ খ. $a^2 - b^2$

গ. 1 ঘ. $(a^2 + b^2)(a - b)$

৫। $\frac{46x^4y^3z^9}{69x^7y^2z^6}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করলে কত হবে ?

ক. $\frac{23xyz^3}{34x^3z^2}$ খ. $\frac{3y^2z^3}{4x^3}$

গ. $\frac{2yz^2}{3x^3}$ ঘ. $\frac{2yz^3}{3x^3}$

৬। $\frac{4a^2b - 9b^3}{4a^2b + 6ab^2}$ কে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করলে হবে-

ক. $\frac{2a + 3b}{2ab}$ খ. $\frac{2a - 3b}{2ab}$

গ. $\frac{2a - 3b}{2a}$ ঘ. $\frac{2a + 3b}{2a}$

৭। $\frac{x}{x - y}$ থেকে $\frac{y}{x - y}$ বিয়োগ করলে বিয়োগফল কত হবে ?

ক. x খ. y

গ. 1 ঘ. 0

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। দুইটি বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ হল $\frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ ও $\frac{x}{x^2 - 1}$

ক. প্রথম ভগ্নাংশের হরকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।
খ. ভগ্নাংশ দুইটির হরের ল. সা. গু. নির্ণয় কর।
গ. ভগ্নাংশ দুইটি লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

২। $\frac{x^2}{ab}$, $\frac{(x + a)^2}{a^2 - ab}$ ও $\frac{(x + b)^2}{ab - b^2}$ তিনটি বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ।

ক. দ্বিতীয় ভগ্নাংশের হরকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।
খ. ভগ্নাংশগুলোর হরের ল. সা. গু. নির্ণয় কর।
গ. প্রথম ও দ্বিতীয় ভগ্নাংশের যোগফল থেকে তৃতীয় ভগ্নাংশ বিয়োগ কর।

৩। $\frac{1}{a(a + 3)}$, $\frac{b}{a^2 + 5a + 6}$ ও $\frac{c}{a^2 - a - 12}$ তিনটি বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ।

ক. প্রথম ভগ্নাংশের হরের a এর ঘাত কত?
খ. দ্বিতীয় ও তৃতীয় ভগ্নাংশের হরকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।
গ. ভগ্নাংশ তিনটিকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

পঞ্চম অধ্যায়

সরল সমীকরণ ও প্রয়োগ

৫.১। পূর্বপাঠের পুনরালোচনা

সমীকরণ : কমপক্ষে একটি বীজগণিতীয় রাশিসহ দুইটি রাশিকে সমান (=) চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করলে ঐ সম্পর্কটিকে সমীকরণ বলা হয়। সমীকরণের (=) চিহ্নের বামপাশের রাশিকে বামপক্ষ এবং ডানপাশের রাশিকে ডানপক্ষ বলে। যেমন, $x+5 = 14$, $x^2+5x+3 = 0$, $2x+3y = 5$ ইত্যাদি সমীকরণ।

অজ্ঞাত রাশি : সমীকরণের যে বীজগণিতীয় প্রতীকের এক বা একাধিক নির্দিষ্ট মান সমীকরণের উভয় পক্ষকে সমান করে, ঐ প্রতীককে সমীকরণের অজ্ঞাত রাশি বলা হয়।

সমীকরণের বীজ : অজ্ঞাত রাশির যে নির্দিষ্ট মান বা মানগুলো সমীকরণের উভয়পক্ষকে সমান করে, ঐ মানটি বা মানগুলো দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়েছে, এরূপ বলা হয়। ঐ মানটি বা মানগুলোকে সমীকরণের বীজ বলে।

সরল সমীকরণ : যে সমীকরণে একঘাতবিশিষ্ট একটি মাত্র অজ্ঞাত রাশি থাকে, তাকে সরল সমীকরণ বলা হয়। যেমন, $x-13 = 0$, $3x+5 = x+7$ ইত্যাদি সরল সমীকরণ।

সমীকরণের সমাধান : সমীকরণের বীজ নির্ণয়ের প্রক্রিয়াকে সমীকরণের সমাধান বলা হয়।

মন্তব্য : সমীকরণ শব্দটি ব্যাপক অর্থে ব্যবহৃত হয়। অজ্ঞাত রাশির নির্দিষ্ট মান দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হলে ঐটিকে আমরা সমীকরণ বলি। কিন্তু সমীকরণটি অজ্ঞাত রাশির যে-কোনো মানের জন্য সিদ্ধ হলে তাকে অভেদ বলা হয়।। যেমন, $(x+2)(x-2) = x^2-4$. একটি অভেদ কারণ x এর যে-কোনো মানের জন্য এটি সিদ্ধ হবে।

৫.২। সমীকরণের সমাধানে নিচের স্বতঃসিদ্ধগুলো ব্যবহার করতে হয়

(i) সমান সমান রাশির সঙ্গে একই রাশি যোগ করলে যোগফলগুলো পরস্পর সমান হবে।

(ii সমান সমান রাশি থেকে একই রাশি বিয়োগ করলে বিয়োগফলগুলো পরস্পর সমান হবে।

(iii) সমান সমান রাশিকে একই রাশি দ্বারা গুণ করলে গুণফলগুলো পরস্পর সমান হবে।

(iv) শূন্য বাদে একই রাশি দ্বারা সমান সমান রাশিকে ভাগ করলে ভাগফলগুলো সমান হবে।

৫.৩। সমীকরণের বিধিসমূহ

পক্ষান্তর বিধি

প্রদত্ত সমীকরণ	**প্রাপ্ত সমীকরণ**	**স্বতঃসিদ্ধ**
$3x + 5 = 2x$	$3x + 5 - 5 = 2x - 5$ বা, $3x = 2x - 5$	প্রদত্ত সমীকরণের উভয়পক্ষ থেকে 5 বিয়োগ করা হয়েছে।
$3x + 9 = 5 - 2x$	$3x + 9 + 2x = 5 - 2x + 2x$ বা, $3x + 9 + 2x = 5$	প্রদত্ত সমীকরণের উভয়পক্ষে 2x যোগ করা হয়েছে।

লক্ষ করি : * প্রথম ক্ষেত্রে 5 এর চিহ্ন পরিবর্তিত হয়ে বামপক্ষ থেকে ডানপক্ষে গেছে।

* দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $-2x$ এর চিহ্ন পরিবর্তিত হয়ে ডানপক্ষ থেকে বামপক্ষে গেছে।

> সমীকরণের যে-কোনো পদকে চিহ্ন পরিবর্তন করে একপক্ষ থেকে অপরপক্ষে স্থানান্তরিত করা যেতে পারে। একে বলা হয় **পক্ষান্তর বিধি**।

যোগের বর্জন বিধি

প্রদত্ত সমীকরণ	**প্রাপ্ত সমীকরণ**	**স্বতঃসিদ্ধ**
$3x + 5 = x + 5$	$3x + 5 - 5 = x + 5 - 5$ বা, $3x = x$	সমীকরণের উভয়পক্ষ থেকে 5 বিয়োগ করা হয়েছে।
$2x - 3 = 9x - 3$	$2x - 3 + 3 = 9x - 3 + 3$ বা, $2x = 9x$	সমীকরণের উভয়পক্ষে 3 যোগ করা হয়েছে।

> একই চিহ্নযুক্ত পদ সমীকরণের উভয়পক্ষ থেকে বর্জন করা যায়। একে বলা হয় যোগের বর্জন বিধি।

গুণের বর্জন বিধি

প্রদত্ত সমীকরণ	**প্রাপ্ত সমীকরণ**	**স্বতঃসিদ্ধ**
$3(x+3) = 3(2x+5)$	$x+3 = 2x +5$	উভয় পক্ষকে সাধারণ উৎপাদক 3 দ্বারা ভাগ করা হয়েছে।

লক্ষ করি : উভয়পক্ষ থেকে সাধারণ উৎপাদক 3 বর্জন করা হয়েছে।

> সমীকরণের উভয়পক্ষ থেকে সাধারণ উৎপাদক বর্জন করা যায়। একে বলা হয় **গুণের বর্জন বিধি।**

আড়গুণন বিধি

মনে করি, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\therefore \frac{a}{b} \times bd = \frac{c}{d} \times bd$, [উভয়পক্ষকে bd দ্বারা গুণ করে]

বা, $ad = bc$.

অর্থাৎ,

> বামপক্ষের লব x ডানপক্ষের হর= বামপক্ষের হর * ডানপক্ষের লব । একে বলা হয় **আড়গুণন বিধি।**

সমীকরণের সমাধানে নিচের নিয়মগুলোও অনুসরণ করতে হয় :

(i) সমীকরণে অজ্ঞাত রাশিটিকে সাধারণত বামপক্ষে রাখা হয়।

(ii) সমীকরণের বামপক্ষের সব পদগুলো ডানদিকে এবং ডানপক্ষের সব পদগুলো বামদিকে একই সঙ্গে চিহ্ন পরিবর্তন না করে স্থানান্তরিত করা যায়। যেমন,

$2x+3=5x-9$

বা, $-5x+9=-2x-3$ [পক্ষান্তর বিধি অনুযায়ী]

বা, $-(5x-9)=-(2x+3)$

বা, $(-1)(5x-9)=(-1)(2x+3)$

$\therefore 5x-9=2x+3$ [গুণের বর্জন বিধি অনুযায়ী উভয়পক্ষ থেকে -1 বর্জন করে]

একে বলা হয় **সমীকরণের প্রতিসাম্য বিধি।**

৫.৪ । সরল সমীকরণের সমাধান

উদাহরণ ১। সমাধান কর : $5x-13=12$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ, $5x-13=12$

বা, $5x=12+13$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $5x=25$

$\therefore x=5$, [উভয়পক্ষকে 5 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore$ সমীকরণটির বীজ $= 5$.

শুদ্ধি পরীক্ষা : বামপক্ষ $= 5x-13$

$= 5\times 5-13$

$= 25-13=12$

এবং ডানপক্ষ $=12$

$\therefore$ বামপক্ষ=ডানপক্ষ

$\therefore$ সমীকরণটির সমাধান শুদ্ধ হয়েছে।

উদাহরণ ২। সমাধান কর : $5(1-x)+3(2-x)=-29$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ, $5(1-x)+3(2-x)=-29$

বা, $5-5x+6-3x=-29$

বা, $-5x-3x=-29-5-6$

বা, $-8x=-40$

বা, $x=\frac{-40}{-8}$

$\therefore x=5$.

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ $= 5$.

শুদ্ধি পরীক্ষা : বামপক্ষ$= 5(1-x)+3(2-x)$

$= 5(1-5)+3(2-5)$

$= 5(-4)+3(-3)$

$= -20-9=-29$

এবং ডানপক্ষ $= -29$.

$\therefore$ বামপক্ষ= ডানপক্ষ,

সুতরাং সমীকরণের সমাধান শুদ্ধ হয়েছে।

উদাহরণ ৩। সমাধান কর : $\frac{x}{6}-\frac{x}{5}=\frac{x}{15}-\frac{x}{3}+7$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ, $\frac{x}{6}-\frac{x}{5}=\frac{x}{15}-\frac{x}{3}+7$

বা, $\frac{x}{6}-\frac{x}{5}-\frac{x}{15}+\frac{x}{3}=7$

বা, $\frac{5x-6x-2x+10x}{30}=7$

বা, $\frac{15x-8x}{30}=7$

বা, $\frac{7x}{30}=\frac{7}{1}$

বা, $7x=7\times 30$ [আড়গুণন করে]

$\therefore$ $x=30$, [উভয়পক্ষ থেকে 7 বর্জন করে]

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ = 30.

মন্তব্য : শুদ্ধি পরীক্ষা আলাদাভাবে করতে হয়।

বিকল্প পদ্ধতি

সমীকরণের পদগুলোর হর 6, 5, 15, 3 এর ল.সা.গু. 30.
উভয়পক্ষকে ল.সা.গু 30 দ্বারা গুণ করে আমরা পাই,

$5x-6x=2x-10x+210$

বা, $5x-6x-2x+10x=210$

বা, $15x-8x=210$

বা, $7x=210$

$\therefore x=\frac{210}{7}=30$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ = 30.

উদাহরণ ৪। সমাধান কর : $\frac{2x}{3}+\frac{5x-2}{4}=\frac{11x+6}{12}$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ, $\frac{2x}{3}+\frac{5x-2}{4}=\frac{11x+6}{12}$

এখানে রাশিগুলোর হর 3, 4, 12 এর ল.সা.গু. 12.

প্রদত্ত সমীকরণের উভয়পক্ষকে 12 দ্বারা গুণ করে আমরা পাই,

$4.2x+3(5x-2)=11x+6$

বা, $8x+15x-6=11x+6$

বা, $8x+15x-11x=6+6$

বা, $23x-11x=12$

বা, $12x=12$

$\therefore\ x=\frac{12}{12}=1$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ = 1.

উদাহরণ ৫। সমাধান কর : $\frac{x-2}{5}-\frac{x+2}{9}=5-\frac{2x+1}{3}$

সমাধান : প্রদত্ত সমীকরণ, $\frac{x-2}{5}-\frac{x+2}{9}=5-\frac{2x+1}{3}$

এখানে হরগুলো 5,9,3 এর ল.সা.গু. 45.

উভয়পক্ষকে 45 দ্বারা গুণ করে আমরা পাই,

$9(x-2)-5(x+2)=5.45-15(2x+1)$

বা, $9x-18-5x-10=225-30x-15$

বা, $4x-28=210-30x$

বা, $4x+30x=210+28$

বা, $34x=238$

$\therefore\ x=\frac{238}{34}=7$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ = 7.

প্রশ্নমালা ৫.১

সমাধান কর : (প্রশ্ন 1-30)

1. $4x+3=2x+5.$
2. $3x+2=x+6.$
3. $5x-6=2x+3.$
4. $15x-9=11x-25.$
5. $19-3x=5x+35.$
6. $13x-5=3-2x.$
7. $2x+9=13x-17.$
8. $15x-9=11x-35.$
9. $\frac{x}{7}=-4$
10. $\frac{x}{2}+5=\frac{x}{3}+7.$
11. $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=\frac{x}{5}-\frac{1}{6}$
12. $\frac{x}{3}-\frac{1}{2}=\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$

13. $\frac{x}{5}-\frac{2}{7}=\frac{5x}{7}-\frac{4}{5}$.

14. $\frac{x}{4}+\frac{3}{5}=3\frac{3}{4}-\frac{x}{5}$

15. $4(2-x)+2(3-2x)=30$

16. $7(3-2x)+5(x-1)=34$

17. $3(x-2)+7(2x-3)=5(1-2x)-59.$

18. $8(2x-7)-9(3x-14)-15=0.$

19. $5\left(x+\frac{1}{2}\right)-6\left(2x+\frac{1}{3}\right)=7\frac{1}{2}$.

20. $\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{3}(x+2)+\frac{1}{4}(x+3)=16$

21. $\frac{3x+1}{5}=\frac{2x-7}{3}$

22. $\frac{5x-1}{4}+\frac{2x+3}{5}=\frac{13x+7}{10}$

23. $\frac{x+6}{4}+\frac{x+2}{6}=\frac{x}{2}-\frac{x-4}{3}$

24. $\frac{x+1}{2}-\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{5}=2.$

25. $\frac{3x+7}{4}-x+\frac{5x-4}{7}=3\frac{1}{2}.$

26. $\frac{x-2}{4}+\frac{1}{3}=x-\frac{2x-1}{3}.$

27. $\frac{3x+\frac{1}{2}}{3}+\frac{x+1}{5}=\frac{7}{6}$.

28. $\frac{2x-13}{9}-\frac{x-3}{5}=3-\frac{x+3}{15}$

29. $(x+1)(x+2)=(x+4)(x-2).$

30. $(2x-1)(x+3)=2x(x+1).$

৫.৫। সমীকরণের প্রয়োগ

সমীকরণ প্রয়োগ করে অনেক পাটিগাণিতিক সমস্যার সমাধান সহজে করা যায়। সমস্যার নির্ণেয় রাশি বা রাশিগুলোকে বীজগণিতীয় প্রতীক দ্বারা সূচিত করতে হয়। এরপর সমস্যার শর্তগুলোর সাহায্যে সমীকরণ গঠন করে সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করা যায়। সমীকরণটির সমাধানে প্রাপ্ত মানই নির্ণেয় রাশির মান।

উদাহরণ ৬। রায়হান সাধারণ গণিত ও উচ্চতর গণিতে একত্রে 185 নম্বর পেয়েছে। সে সাধারণ গণিত অপেক্ষা উচ্চতর গণিতে 5 নম্বর কম পেয়েছে। প্রত্যেক বিষয়ে তার প্রাপ্ত নম্বর কত ?

সমাধান : মনে করি, রায়হানের সাধারণ গণিতে প্রাপ্ত নম্বর x.

তাহলে, তার উচ্চতর গণিতে প্রাপ্ত নম্বর $(x-5)$. [যেহেতু উচ্চতর গণিতে প্রাপ্ত নম্বর 5 কম]

প্রদত্ত শর্ত অনুসারে,

$x+(x-5)=185$

বা, $x+x-5=185$

বা, $2x=185+5$

বা, $2x=190$

$\therefore\ x=\frac{190}{2}=95.$

$\therefore$ রায়হানের সাধারণ গণিতে প্রাপ্ত নম্বর 95 এবং উচ্চতর গণিতে প্রাপ্ত নম্বর (95–5) বা, 90.

উদাহরণ ৭। দুইটি সংখ্যার যোগফল ও বিয়োগফল যথাক্রমে 320 ও 20. সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বৃহত্তর সংখ্যাটি x.

যেহেতু সংখ্যা দুইটির যোগফল 320. সুতরাং অপর সংখ্যাটি $(320 - x)$.

প্রদত্ত শর্ত অনুসারে,

$x - (320 - x) = 20$ [যেহেতু সংখ্যা দুইটির বিয়োগফল 20]

বা, $x - 320 + x = 20$

বা, $2x = 20 + 320$

বা, $x = \frac{340}{2} = 170.$

$\therefore$ বৃহত্তর সংখ্যাটি 170 এবং অপর সংখ্যাটি (320–170) বা, 150.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা দুইটি যথাক্রমে 170 ও 150.

উদাহরণ ৮। ঢাকা থেকে যাত্রা শুরু করে জামান প্রতি ঘণ্টায় 20 কিলোমিটার গতিবেগে চলে তার বাড়িতে পৌঁছল। আবার প্রতি ঘণ্টায় 30 কিলোমিটার গতিবেগে চলে বাড়ি থেকে ঢাকায় ফিরে এল। এতে তার মোট 10 ঘণ্টা সময় লাগল। ঢাকা থেকে তার বাড়ির দূরত্ব কত?

সমাধান : মনে করি, ঢাকা থেকে জামানের বাড়ির দূরত্ব x কি.মি.।

ঢাকা থেকে বাড়ি যেতে তার সময় লাগল $\frac{x}{20}$ ঘণ্টা।

আবার বাড়ি থেকে ঢাকায় ফিরে আসতে সময় লাগল $\frac{x}{30}$ ঘণ্টা।

এখন প্রদত্ত শর্ত অনুসারে,

$\frac{x}{20} + \frac{x}{30} = 10$

বা, $3x + 2x = 600$ [উভয়পক্ষকে 60 দ্বারা গুণ করে।]

বা, $5x = 600$

বা, $x = \frac{600}{5} = 120.$

$\therefore$ ঢাকা থেকে জামানের বাড়ির দূরত্ব 120 কি. মি.।

প্রশ্নমালা ৫.২

সমীকরণ গঠন করে সমাধান কর : (প্রশ্ন 1 – 15)

1. কোন সংখ্যার সঙ্গে 5 যোগ করলে যোগফল 38 হবে ?
2. কোন সংখ্যা থেকে 15 বিয়োগ করলে বিয়োগফল – 21 হবে ?
3. আজমল ও শফিকের বয়স একত্রে 35 বছর। আজমলের বয়স শফিকের বয়স অপেক্ষা 5 বছর বেশি হলে, প্রত্যেকের বয়স নির্ণয় কর।
4. দুইটি সংখ্যার যোগফল ও বিয়োগফল যথাক্রমে 80 ও 24. সংখ্যা দুইটি কত?
5. তিনটি ক্রমিক সংখ্যার যোগফল 135. সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।
6. কোন সংখ্যার এক-তৃতীয়াংশের সঙ্গে এক-চতুর্থাংশ যোগ করলে যোগফল 35 হবে ?
7. কোন সংখ্যার 11 গুণ থেকে 63 বিয়োগ করলে বিয়োগফল 190 হবে?
8. জামাল, কামাল ও হরিপদের একত্রে 177 টাকা আছে। কামালের চেয়ে জামালের 5 টাকা কম ও হরিপদের জামাল অপেক্ষা 7 টাকা বেশি আছে। প্রত্যেকের টাকার পরিমাণ নির্ণয় কর।
9. একজন-ফল বিক্রেতার মোট ফলের $\frac{1}{6}$ আপেল, $\frac{1}{8}$ আম, $\frac{1}{4}$ কমলালেবু এবং 165 টি লিচু ছিল। ফল বিক্রেতার নিকট কতগুলো ফল ছিল?
10. ঢাকা থেকে শ্রীপুরের দূরত্ব 48 কিলোমিটার। দুই জন লোক যথাক্রমে ঢাকা ও শ্রীপুর থেকে একই সময়ে রওনা হয়ে 6 ঘণ্টা পরে মিলিত হল। প্রথম জনের গতিবেগ দ্বিতীয় জনের গতিবেগের 3 গুণ হলে, প্রত্যেকের গতিবেগ নির্ণয় কর।
11. একটি ট্রেন প্রতি ঘণ্টায় 30 কি. মি. বেগে চলে গন্তব্যস্থানে পৌঁছল। ট্রেনটির বেগ ঘণ্টায় 27 কি.মি. হলে, গন্তব্যস্থানে পৌঁছতে 20 মিনিট সময় বেশি লাগত। পথের দূরত্ব নির্ণয় কর।
12. দুইটি সংখ্যার বিয়োগফল 25. বৃহত্তর সংখ্যাটির 4 গুণ ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটির 5 গুণের সমান হলে, সংখ্যা দুইটি কত?
13. একজন নৌকার মাঝি স্রোতের অনুকূলে 5 ঘণ্টায় 45 কিলোমিটার অতিক্রম করল। স্থির পানিতে নৌকার গতিবেগ ঘণ্টায় 7 কিলোমিটার হলে, ঘণ্টায় স্রোতের গতিবেগ নির্ণয় কর।
14. একটি নৌকা স্রোতের প্রতিকূলে যে গতিবেগে চলে স্রোতের অনুকূলে ঐ গতিবেগের 5 গুণ গতিবেগে যেতে পারে। স্থির পানিতে নৌকার গতিবেগ ঘণ্টায় 6 কি.মি. হলে, ঘণ্টায় স্রোতের গতিবেগ কত?
15. একটি কলম ও একটি বইয়ের মোট দাম 95 টাকা। কলমটির দাম 15 টাকা বেশি ও বইটির দাম 14 টাকা কম হলে, কলমটির দাম বইয়ের দামের 2 গুণ হত। একটি কলমের দাম কত?

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। একটি সরল সমীকরণে কতটি অজ্ঞাত রাশি থাকে ?

ক. ১টি খ. ২টি

গ. ৩টি ঘ. ৪টি

২। নিচের কোনটি সমীকরণ নির্দেশ করে ?

ক. $x^{\circ} = 1$ খ. $4x^2 = 4x.x$

গ. $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ ঘ. $x + 5 = 14$

৩। রহিম গণিত ও উচ্চতর গণিতে একত্রে 180 নম্বর পেয়েছে। সে গণিত অপেক্ষা উচ্চতর গণিতে 10 নম্বর কম পেয়েছে। গণিতে প্রাপ্ত নম্বর x হলে, ওপরের তথ্যানুসারে নিচের কোন সম্পর্কটি সঠিক ?

ক. $x - (x - 10) = 180$ খ. $x + (x - 10) = 180$

গ. $(x - 10) - x = 180$ ঘ. $180 - x = 10 - x$

৪। দুইটি ক্রমিক সংখ্যার যোগফল 15 হলে, সংখ্যা দুইটির সঠিক মান নিচের কোনটি ?

ক. (4, 11) খ. (10, 5)

গ. (7, 8) ঘ. (9, 6)

৫। (i) সমীকরণে অজ্ঞাত রাশিটিকে সর্বদা বামপক্ষে রাখা হয়

(ii) $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$ একটি অভেদ

(iii) সমীকরণের উভয়পক্ষ থেকে সাধারণ উৎপাদক বর্জন করা যায়

ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. i ও iii

গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

স্বপ্নীলের নিকট শিথীল অপেক্ষা 25টি পেন্সিল বেশি আছে। স্বপ্নীলের পেন্সিলের 4 গুণ শিথীলের পেন্সিলের ৪ গুণের সমান।

ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে ৬ - ৭ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

৬। স্বপ্নীলের পেন্সিলের সংখ্যা x এবং শিথীলের পেন্সিলের সংখ্যা y হলে, নিচের কোন সম্পর্কটি সঠিক ?

ক. $x + y + 25 = 0$ খ. $x + 25 = y$

গ. $x + y = 25$ ঘ. $x = y + 25$

৭। শিথীলের নিকট পেন্সিলের সংখ্যা নিচের কোনটিতে প্রকাশ পায় ?

ক. 25 টি খ. 50 টি

গ. 75 টি ঘ. 100 টি

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। নিচের সমীকরণ দুইটি লক্ষ কর :

i. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{5} - \frac{1}{6} + \frac{2x}{15}$

ii. $\frac{2x}{3} + \frac{5x-2}{4} = \frac{11x+6}{12}$

ক. (i) নম্বর সমীকরণের রাশিগুলোর হরের ল.সা.গু. বের কর।

খ. (i) নম্বর সমীকরণের সমাধান নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, (i) নম্বর সমীকরণের বীজই (ii) নম্বর সমীকরণের বীজ।

২। একটি কলম ও একটি বইয়ের মোট মূল্য 190 টাকা। কলমের মূল্য 30 টাকা বেশি ও বইয়ের মূল্য 25 টাকা কম হলে, কলমের মূল্য বইয়ের মূল্যের 2 গুণ হয়।

(একটি কলমের মূল্য x টাকা ও একটি বইয়ের মূল্য y টাকা)

ক. একটি কলম এবং একটি বইয়ের মোট মূল্য সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. x কে y এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

গ. একটি কলম ও একটি বইয়ের মূল্য আলাদাভাবে নির্ণয় কর।

৩। ঢাকা থেকে গফরগাঁও এর দূরত্ব 72 কি.মি.। কেয়া ও সুমী যথাক্রমে ঢাকা ও গফরগাঁও থেকে একই সময়ে রওনা হয়ে 6 ঘণ্টা পরে মিলিত হল। কেয়ার গতিবেগ সুমীর গতিবেগের 3 গুণ।

ক. সুমীর গতিবেগ x কি.মি. হলে, উভয়ের গতিবেগের সমষ্টি বের কর।

খ. সুমীর গতিবেগ নির্ণয় কর।

গ. উভয়ের গতিবেগ 2 কি.মি. বৃদ্ধি পেলে নির্দিষ্ট গন্তব্যে পৌঁছাতে সুমীর কেয়া অপেক্ষা কত সময় বেশি লাগবে তা নির্ণয় কর।

নিম্ন মাধ্যমিক গণিত

জ্যামিতি

প্রথম অধ্যায়

পুনরালোচনা ও প্রাথমিক ধারণা

১.১। জ্যামিতি

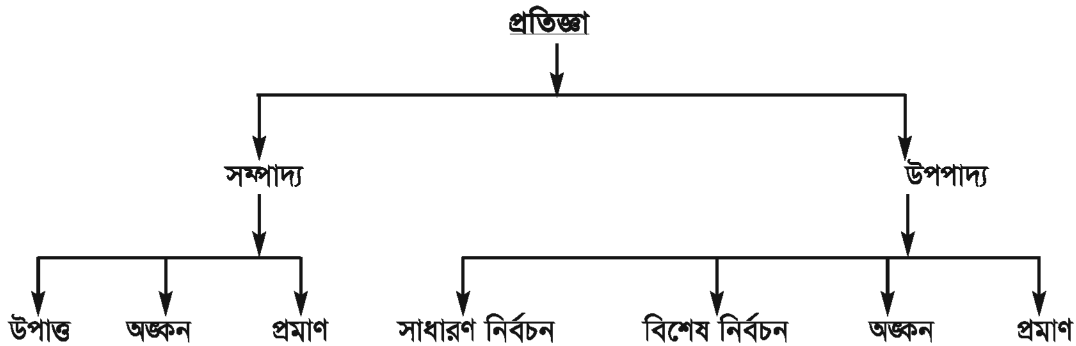
“জ্যা” অর্থ ভূমি, “মিতি” অর্থ পরিমাপ প্রণালী। ভূমি বা জমি পরিমাপের প্রণালী থেকেই জ্যামিতি শাস্ত্রের উদ্ভব।

১.২। জ্যামিতিতে ব্যবহৃত সাংকেতিক চিহ্নসমূহ

চিহ্ন	অর্থ	চিহ্ন	অর্থ
+	যোগ	∠	কোণ
=	সমান	⊥	লম্ব
>	বৃহত্তর	Δ	ত্রিভুজ
<	ক্ষুদ্রতর	ʘ	বৃত্ত
≅	সর্বসম	∵	যেহেতু
‖	সমান্তরাল	∴	সুতরাং

১.৩। জ্যামিতিক যুক্তি পদ্ধতি

প্রতিজ্ঞা : জ্যামিতিতে যে সকল বিষয়ের আলোচনা করা হয়, সাধারণভাবে তাদের প্রতিজ্ঞা বলা হয়।



সম্পাদ্য : যে প্রতিজ্ঞায় কোনো জ্যামিতিক বিষয় অঙ্কন করে দেখানো হয় এবং যুক্তি দ্বারা অঙ্কনের নির্ভুলতা প্রমাণ করা হয়, তাকে সম্পাদ্য বলা হয়। সম্পাদ্যের বিভিন্ন অংশ :

ক) **উপাত্ত** : সম্পাদ্যে যা দেওয়া থাকে, তাই উপাত্ত।

খ) **অঙ্কন** : সম্পাদ্যে যা করণীয়, তাই অঙ্কন।

গ) **প্রমাণ :** যুক্তি দ্বারা অঙ্কনের নির্ভুলতা যাচাই।

উপপাদ্য : যে প্রতিজ্ঞায় কোনো জ্যামিতিক বিষয়কে যুক্তি দ্বারা প্রতিষ্ঠিত করা হয়, তাকে উপপাদ্য বলে। উপপাদ্যের বিভিন্ন অংশ :

ক) **সাধারণ নির্বচন :** এ অংশে প্রতিজ্ঞার বিষয়টি সরলভাবে বর্ণনা করা হয়।

খ) **বিশেষ নির্বচন :** এ অংশে প্রতিজ্ঞার বিষয়টি চিত্র দ্বারা বিশেষভাবে দেখানো হয়।

গ) **অঙ্কন :** এ অংশে প্রতিজ্ঞা সমাধানের বা প্রমাণের জন্য অতিরিক্ত অঙ্কন করতে হয়।

ঘ) **প্রমাণ :** এ অংশে স্বতঃসিদ্ধগুলো এবং আগে পঠিত জ্যামিতিক সত্য ব্যবহার করে উপযুক্ত যুক্তি দ্বারা প্রস্তাবিত বিষয়টিকে প্রতিষ্ঠিত করা হয়।

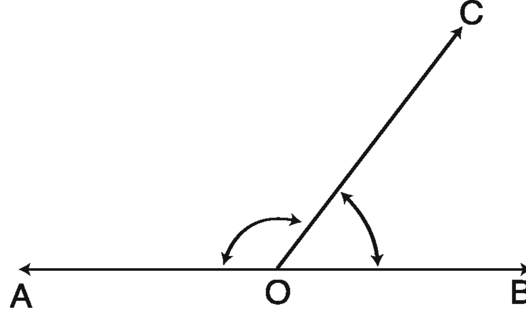
অনুসিদ্ধান্ত : কোনো জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞা প্রতিষ্ঠিত করে তার সিদ্ধান্ত থেকে এক বা একাধিক নতুন সিদ্ধান্ত উপস্থাপিত করা যায়, তাদের অনুসিদ্ধান্ত বলা হয়।

বিপরীত উপপাদ্য : একটি উপপাদ্যের "স্বীকার্য" ও "সিদ্ধান্ত" যথাক্রমে অন্য একটি উপপাদ্যের "সিদ্ধান্ত" ও "স্বীকার্য" হলে, উপপাদ্যদ্বয়ের একটিকে অপরটির বিপরীত উপপাদ্য বলা হয়।

আগের শ্রেণীতে পঠিত কয়েকটি উপপাদ্যের কার্যাদির বিবরণ নিচে দেওয়া হল :

উপপাদ্য – ১

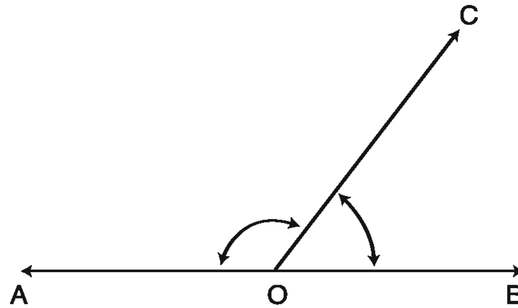
একটি রশ্মির প্রান্তবিন্দুতে অপর একটি সরলরেখা মিলিত হলে, যে দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয়, এদের সমষ্টি দুই সমকোণ।



চিত্রে, OC রশ্মির প্রান্তবিন্দু O তে AB রেখা মিলিত হয়ে $\angle AOC$ ও $\angle BOC$, এ দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন করেছে। সুতরাং, $\angle AOC + \angle BOC =$ দুই সমকোণ।

উপপাদ্য – ২

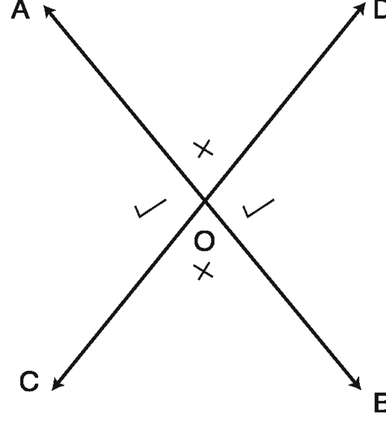
দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হলে, এদের বহিঃস্থ বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত।



চিত্রে, $\angle AOC$ ও $\angle BOC$ এ দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ। OA এবং OB তাদের বহিঃস্থ বাহুদ্বয়। সুতরাং, OA ও OB একই সরলরেখায় অবস্থিত।

উপপাদ্য – ৩

দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করলে উৎপন্ন বিপ্রতীপ কোণগুলো পরস্পর সমান।



চিত্রে. AB ও CD রেখা দুইটি O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

সুতরাং $\angle AOD$ = বিপ্রতীপ $\angle BOC$

এবং $\angle AOC$ = বিপ্রতীপ $\angle BOD$

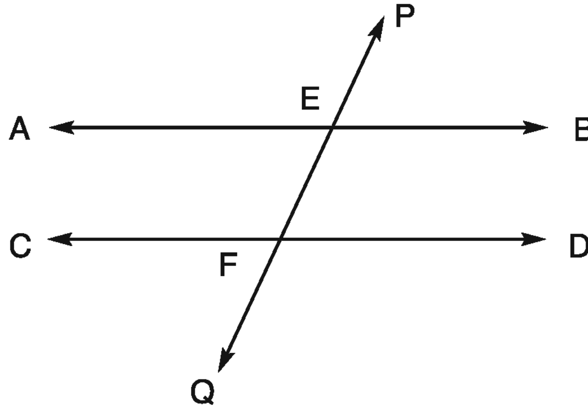
উপপাদ্য – ৪

একটি সরলরেখা অপর দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করলে,

(ক) একান্তর কোণ দুইটি সমান হবে;

(খ) অনুরূপ কোণ দুইটি সমান হবে;

(গ) ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণ হবে।



চিত্রে. $AB \parallel CD$ এবং PQ ছেদক তাদের যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করেছে।

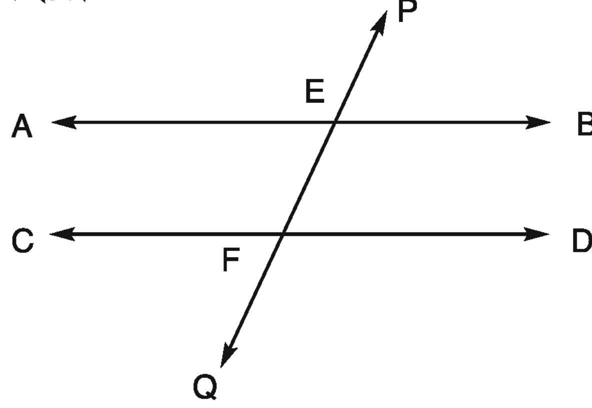
সুতরাং (ক) $\angle AEF$ = একান্তর $\angle EFD$

(খ) $\angle PEB$ = অনুরূপ $\angle EFD$

(গ) $\angle BEF + \angle EFD$ = দুই সমকোণ।

উপপাদ্য – ৫

দুইটি সরলরেখাকে অপর একটি সরলরেখা ছেদ করলে, যদি একান্তর কোণগুলো সমান হয়, অথবা অনুরূপ কোণগুলো সমান হয়, অথবা ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণ দুইটি দুই সমকোণের সমান হয়, তবে ঐ রেখা দুইটি সমান্তরাল হবে।



চিত্রে. AB ও CD রেখাদ্বয়কে PQ রেখা যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং

(ক) $\angle AEF$ = একান্তর $\angle EFD$

অথবা, (খ) $\angle PEB$ = অনুরূপ $\angle EFD$

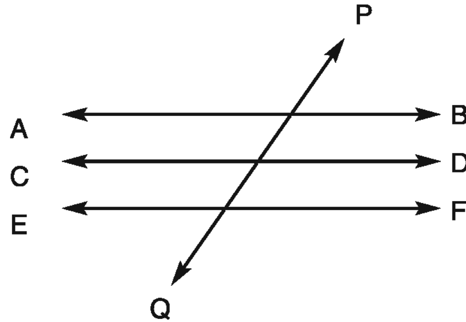
অথবা, (গ) $\angle BEF + \angle EFD$ = দুই সমকোণ

সুতরাং, AB ও CD রেখা দুইটি সমান্তরাল

মন্তব্য : উপপাদ্য ৫, উপপাদ্য ৪ এর বিপরীত প্রতিজ্ঞা।

উপপাদ্য – ৬

যেসব রেখা একই সরলরেখার সমান্তরাল তারা পরস্পর সমান্তরাল।

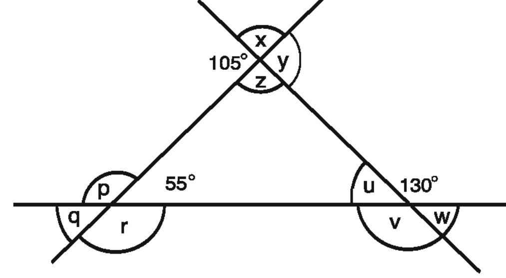


চিত্রে, AB ও EF রেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল। CD ও EF রেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল।

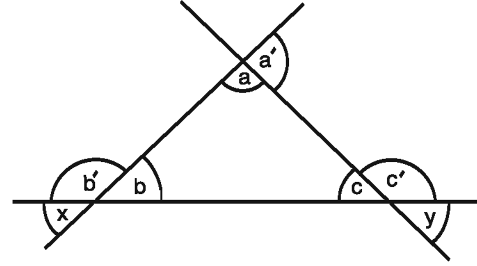
সুতরাং, AB ও CD সমান্তরাল রেখা।

অনুশীলনী – ১.১

১। পাশের চিত্রে নির্দেশিত কোণগুলোর পরিমাপ নির্ণয় কর।



২। পাশের চিত্র হতে নিচের বাক্যগুলোর সত্যতার কারণ বর্ণনা কর :



(a) $a+a'$ = দুই সমকোণ

(b) $c'>a$

(c) $b = x$

(d) $c'>b$

(e) $c = y$

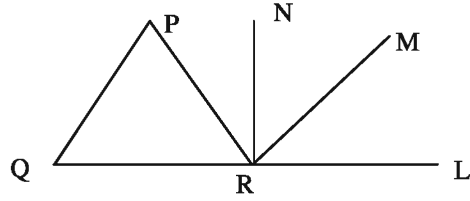
(f) $a + b = c'$

(g) $a' = b + c$

(h) $b + b'$ = দুই সমকোণ।

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১।

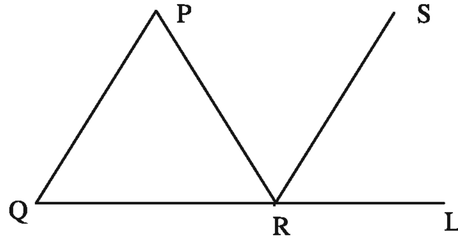


চিত্রে, $\angle PQR = 55^\circ$, $LRN = 90^\circ$ এবং $PQ \parallel MR$ হলে, $\angle MRN$ এর মান নিচের কোনটি ?

ক. 35° খ. 45°

গ. 55° ঘ. 90°

২।



চিত্রে, $PQ \parallel SR$, $\angle QPR = 55^\circ$ এবং $\angle PRQ = 50^\circ$ হলে, $\angle LRS$ এর মান নিচের কোনটি ?

ক. 40° খ. 50°

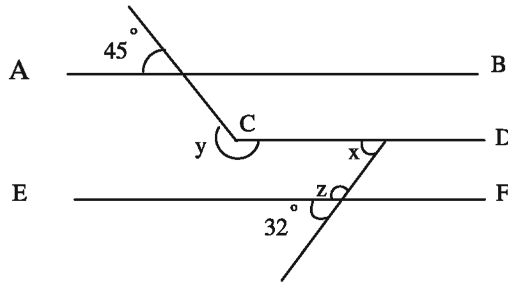
গ. 55° ঘ. 75°

৩। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে ভূমি BC এর সমান্তরাল EF রেখা AB এবং AC কে E, F বিন্দুতে ছেদ করেছে।

$\angle B = 52^\circ$ হলে, $\angle A + \angle F$ এর মান নিচের কোনটি ?

ক. 76° খ. 104°

গ. 128° ঘ. 156°



$AB \parallel CD \parallel EF$

ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে ৪ - ৬ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

৪। $\angle x$ এর সঠিক মান নিচের কোনটি ?

ক. 28° খ. 32°

গ. 45° ঘ. 58°

৫। $\angle z$ এর মান নিচের কোনটি ?

ক. 58° খ. 103°

গ. 122° ঘ. 148°

৬। নিচের কোনটি $y - 2x$ এর সঠিক মান ?

ক. 58° খ. 71°

গ. 103° ঘ. 122°

৭। i. একই রেখার ওপর অবস্থিত দুইটি সন্নিহিত কোণ পরস্পর সমান হতে পারে

ii. বিপ্রতীপ কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক একই সরলরেখায় অবস্থিত

iii. একটি রেখার বহিঃস্থ একটি বিন্দু দিয়ে ঐ রেখার সমান্তরাল একাধিক রেখা আঁকা যায়

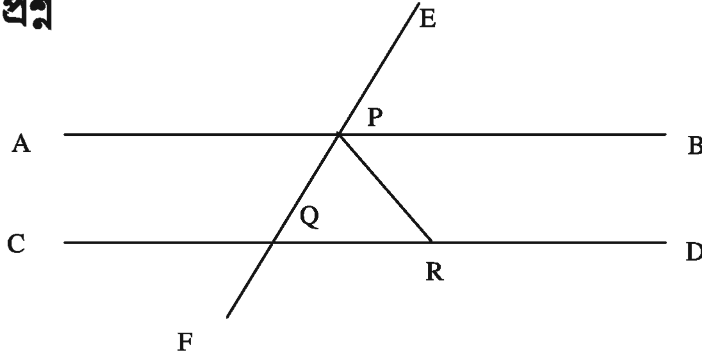
ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. i ও iii

গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

সৃজনশীল প্রশ্ন

১।



চিত্রে, $AB \parallel CD$, $\angle BPE = 60^\circ$ এবং $PQ = PR$.

ক. দেখাও যে, $\frac{1}{2}\angle APE = 60^\circ$

খ. $\angle CQF$ এর মান বের কর।

গ. প্রমাণ কর যে, PQR একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

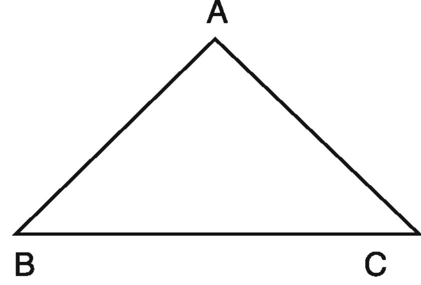
দ্বিতীয় অধ্যায়

ত্রিভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্য

২.১। ত্রিভুজ

তিনটি রেখাংশ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের সীমারেখাকে ত্রিভুজ বলা হয় এবং রেখাংশগুলোকে ত্রিভুজের বাহু বলে। যে-কোনো দুইটি বাহুর সাধারণ বিন্দুকে শীর্ষবিন্দু বলা হয়। দুইটি বাহু শীর্ষবিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন করে তা ত্রিভুজের একটি কোণ। ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ আছে। ত্রিভুজের বাহু তিনটির দৈর্ঘ্যের সমষ্টিকে পরিসীমা বলা হয়।

ত্রিভুজের বাহুগুলো দ্বারা সীমাবন্ধ ক্ষেত্রকে ত্রিভুজক্ষেত্র বলে।

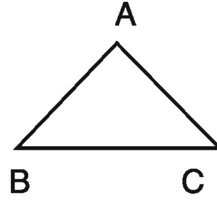


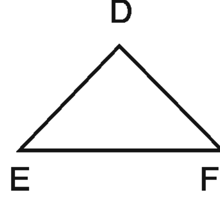
পাশের চিত্রে, ABC একটি ত্রিভুজ। A, B, C এর তিনটি শীর্ষবিন্দু। AB, BC, AC তার তিনটি বাহু এবং $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ তার তিনটি কোণ। AB+BC+AC ত্রিভুজটির পরিসীমা।

যে ত্রিভুজের তিনটি বাহু সমান, তাকে সমবাহু ত্রিভুজ বলা হয়।

যে ত্রিভুজের দুইটি বাহু সমান, তাকে **সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ** বলে।

সর্বসমতা : একটি ত্রিভুজকে অপর একটি ত্রিভুজের উপর স্থাপন করলে যদি ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে মিলে যায়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হয়।



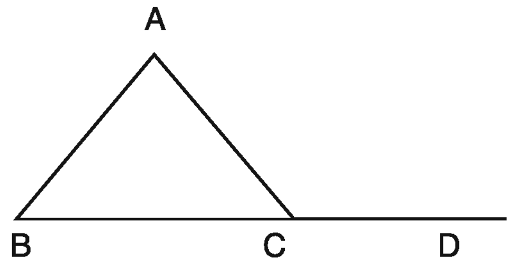


ΔABC ও ΔDEF সর্বসম হলে এবং A, B, C শীর্ষ যথাক্রমে D, E, F শীর্ষের উপর পতিত হলে
$AB = DE, AC = DF, BC = EF,$
$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ হবে।

ΔABC ও ΔDEF সর্বসম বোঝাতে অনেক সময় $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ লেখা হয়।

ত্রিভুজের বহিঃস্থ ও অন্তঃস্থ কোণ : কোনো ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে কোণ উৎপন্ন হয় তা ত্রিভুজটির একটি বহিঃস্থ কোণ। এই কোণের সন্নিহিত কোণটি ছাড়া ত্রিভুজের অপর দুইটি কোণকে এই বহিঃস্থ কোণের বিপরীত অন্তঃস্থ কোণ বলা হয়।

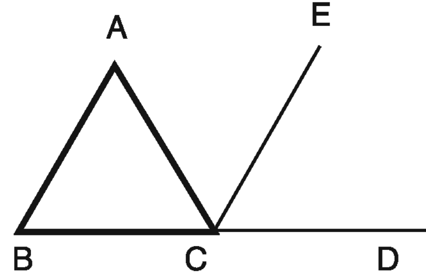
(ক) পাশের চিত্রে, ΔABC এর BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হয়েছে।



$\angle ACD$ ত্রিভুজটির একটি বহিঃস্থ কোণ। $\angle ABC$, $\angle BAC$ ও $\angle ACB$ এর তিনটি অন্তঃস্থ কোণ। $\angle ACB$ কে $\angle ACD$ এর প্রেক্ষিতে সন্নিহিত অন্তঃস্থ কোণ বলা হয়।

$\angle ABC$ ও $\angle BAC$ এর প্রত্যেককে $\angle ACD$ এর প্রেক্ষিতে বিপরীত অন্তঃস্থ কোণ বলা হয়।

(খ) চিত্রে, AB || CE



$\therefore \angle BAC = \angle ACE$ [একান্তর কোণ]

এবং $\angle ABC = \angle ECD$

সুতরাং, $\angle BAC + \angle ABC = \angle ACE + \angle ECD$

$= \angle ACD$

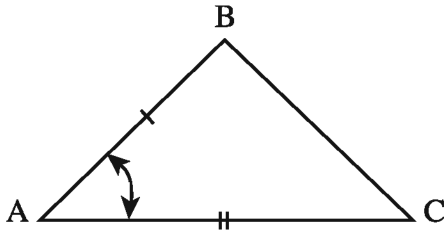
অর্থাৎ, $\angle ACD$ হল $\angle BAC$ ও $\angle ABC$ এর যোগফলের সমান।

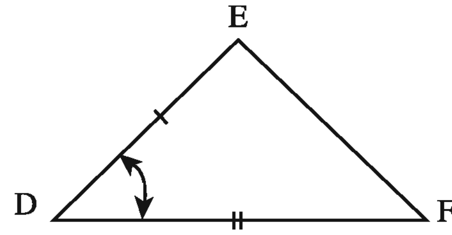
$\therefore \angle ACD$ হল $\angle BAC$ ও $\angle ABC$ এর প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

অর্থাৎ, ত্রিভুজের যে-কোন এক বাহুকে বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণটি বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর। এই সিদ্ধান্তটি পরবর্তী প্রতিজ্ঞাগুলোতে ব্যবহার করা হবে।

উপপাদ্য – ৭

যদি দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই বাহুর সমান হয় এবং বাহু দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ দুইটি পরস্পর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে।





বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC ও ΔDEF এ $AB = DE, AC = DF$

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle BAC =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle EDF$.

প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

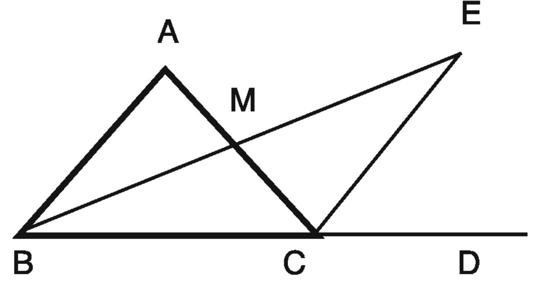
প্রমাণ : ΔABC কে ΔDEFএর উপর এমনভাবে স্থাপন করি যেন A বিন্দু D বিন্দুর উপর ও AB বাহু DE বাহু বরাবর এবং DE বাহুর যে পাশে F আছে C বিন্দু ঐপাশে পড়ে।

এখন $AB = DE$ বলে B বিন্দু অবশ্যই E বিন্দুর উপর পড়বে। আবার, যেহেতু AB বাহু DE বাহুর উপর পড়ে এবং $\angle BAC = \angle EDF$. সুতরাং, AC বাহু DF বাহু বরাবর পড়বে। এখন $AC = DF$ বলে C বিন্দু অবশ্যই F বিন্দুর উপর পড়বে। B বিন্দু E বিন্দুর উপর এবং C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়ে বলে BC বাহু অবশ্যই EF বাহুর সাথে পুরোপুরি মিলে যাবে।

অতএব, ΔABC, ΔDEF এর উপর সমপতিত হবে।

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$. (প্রমাণিত)

একটি বিশেষ প্রতিজ্ঞা



(এই প্রতিজ্ঞাটি পরবর্তী বিভিন্ন উপপাদ্যের প্রমাণে ব্যবহার করা যাবে।)

ত্রিভুজের কোনো বাহু বর্ধিত করা হলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তা ত্রিভুজের বিপরীত অন্তঃস্থ কোণ দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বড়।

মনে করি, ABC ত্রিভুজের BC বাহু D পর্যন্ত বর্ধিত করা হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, বহিঃস্থ $\angle ACD$ বিপরীত অন্তঃস্থ $\angle CAB$ ও $\angle ABC$ এর প্রত্যেকটি অপেক্ষা বড়।

অঙ্কন : B ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু M যোগ করি এবং BM রেখাংশকে E পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $ME = BM$ হয়।

প্রমাণ : ΔMCE ও ΔMAB এর মধ্যে

$MC = MA$ (AC এর মধ্যবিন্দু M বলে)

$ME = MB$ (অঙ্কন অনুযায়ী)

$\angle CME = \angle AMB$ (বিপ্রতীপ কোণ বলে)

$\therefore \Delta MCE$ ও ΔMAB সর্বসম।

সুতরাং $\angle MCE = \angle MAB$

অর্থাৎ, $\angle ACE = \angle CAB$ ....(১)

কিন্তু EC রেখা ও AB রেখার ছেদক AC সাপেক্ষে এরা একান্তর কোণ। ফলে $EC \parallel AB$.

সুতরাং $\angle ECD = \angle ABC$ ....(২)

কিন্তু $\angle ACE$ ও $\angle ECD$ উভয়ই $\angle ACD$ এর অংশ।

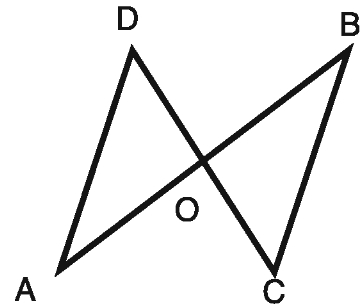
সুতরাং, $\angle ACD > \angle ACE$ এবং $\angle ACD > \angle ECD$.

$\therefore$ (১) ও (২) হতে পাই,

$\angle ACD > \angle CAB$ এবং $\angle ACD > \angle ABC$. (প্রমাণিত)

উদাহরণ ১। চিত্রে, $AO = OB, CO = OD$.

প্রমাণ কর যে, $\Delta AOD \cong \Delta BOC$.



প্রমাণ : ΔAOD এবং ΔBOC - এ

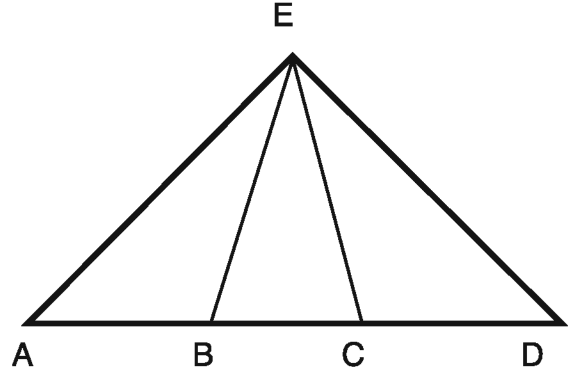
$AO = OB, CO = OD$, (দেওয়া আছে)

এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত $\angle AOD$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle BOC$,

[বিপ্রতীপ কোণ পরস্পর সমান]

$\therefore \Delta AOD \cong \Delta BOC$. [উপপাদ্য –৭] (প্রমাণিত)

উদাহরণ ২। চিত্রে, AD একটি রেখাংশ, এবং B ও C এর অন্তঃস্থ বিন্দু।



আবার, $\angle EBC = \angle ECB$,

$BE = CE$,

$AB = CD$.

প্রমাণ কর যে, $\Delta ABE \cong \Delta DCE$

প্রমাণ : BE রেখাংশ তার প্রান্তবিন্দু B- তে AC রেখার সাথে মিলিত হয়েছে।

$\therefore \angle EBA + \angle EBC =$ দুই সমকোণ ....(১) [উপপাদ্য–১]

আবার CE রেখাংশ তার প্রান্তবিন্দু C-তে BD রেখার সাথে মিলিত হয়েছে।

$\therefore \angle ECB + \angle ECD =$ দুই সমকোণ ....(২)

(১) এবং (২) থেকে আমরা পাই,

$\angle EBA + \angle EBC = \angle ECB + \angle ECD$

বা, $\angle EBA + \angle EBC = \angle EBC + \angle ECD$, [যেহেতু $\angle EBC = \angle ECB$ (দেওয়া আছে)]

উভয়পক্ষ থেকে $\angle EBC$ বাদ দিলে, $\angle EBA = \angle ECD$.

এখন ΔABE এবং ΔDCE -এ

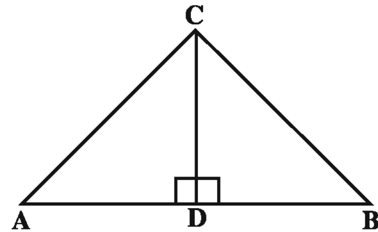
$BE = CE$, $AB = CD$ এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত $\angle EBA =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle ECD$

$\therefore \Delta ABE \cong \Delta DCE$. [উপপাদ্য –৭] (প্রমাণিত)

অনুশীলনী ২.১

১। চিত্রে, CD, AB-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক,

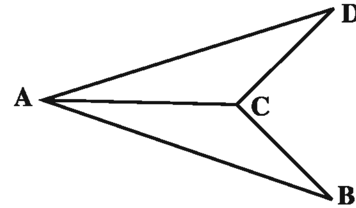
প্রমাণ কর যে, $\Delta ADC \cong \Delta BDC$.



২। চিত্রে, $CD = CB$ এবং

$\angle DCA = \angle BCA$.

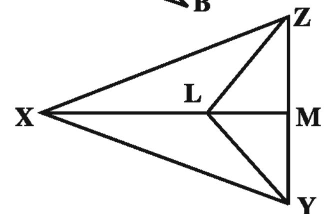
প্রমাণ কর যে, $AB = AD$.



৩। চিত্রে, $XY = XZ$ এবং

XM, $\angle YXZ$- এর সমদ্বিখণ্ডক।

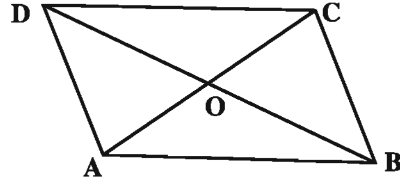
প্রমাণ কর যে, XM রেখাংশ $\angle YLZ$ এরও সমদ্বিখণ্ডক।



৪। চিত্রে, ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রমাণ কর যে, $\Delta AOD \cong \Delta COB$

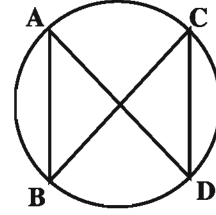
এবং $\Delta DOC \cong \Delta AOB$



৫। প্রমাণ কর যে, একটি রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডকের উপর যে-কোনো বিন্দু রেখাংশের প্রান্তবিন্দুদ্বয় থেকে সমদূরবর্তী।

৬। চিত্রে, ABDC বৃত্তে AD ও BC দুইটি ব্যাস।

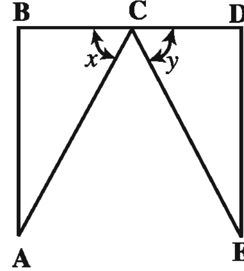
প্রমাণ কর যে, AB = CD.



৭। চিত্রে, C বিন্দু BD-এর মধ্যবিন্দু,

$\angle X = \angle Y$, AC = CE

প্রমাণ কর যে, AB = ED.



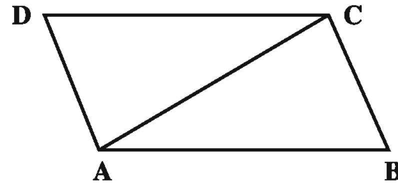
৮। চিত্রে, $\angle BAC = \angle ACD$

এবং AB = DC.

প্রমাণ কর যে, AD = BC.

$\angle CAD = \angle ACB$

এবং $\angle CDA = \angle ABC$



উপপাদ্য – ৮

যদি কোনো ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান হয়, তবে এদের বিপরীত কোণ দুইটিও পরস্পর সমান হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ত্রিভুজে AB = AC.

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ABC = \angle ACB$.

অঙ্কন : $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD আঁকি যেন তা BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : ΔABD এবং ΔACD-এ

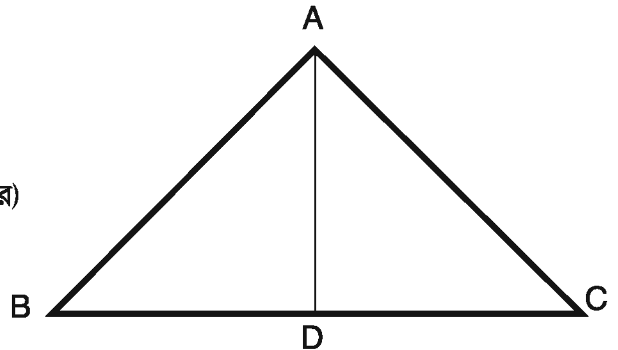
AB = AC (প্রদত্ত), AD সাধারণ বাহু

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle BAD$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle CAD$ (অঙ্কনানুসারে)

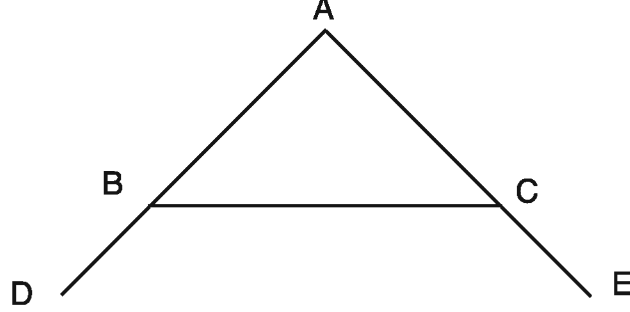
সুতরাং, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ [উপপাদ্য–৭]

$\therefore \angle ABD = \angle ACD$.

অর্থাৎ, $\angle ABC = \angle ACB$. (প্রমাণিত)



উদাহরণ ১। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহু দুইটিকে বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ দুইটি সমান।



মনে করি, ΔABC-এ $AB = AC$. AB কে D পর্যন্ত এবং AC- কে E পর্যন্ত বর্ধিত করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle DBC = \angle ECB$.

প্রমাণ : BC রেখাংশ তার প্রান্তবিন্দু B-তে AD সরলরেখার সাথে মিলিত হয়েছে।

$\therefore \angle ABC + \angle DBC =$ দুই সমকোণ ....(১) [উপপাদ্য–১]

অনুরূপভাবে, $\angle ACB + \angle ECB =$ দুই সমকোণ ....(২)

সুতরাং, $\angle ABC + \angle DBC = \angle ACB + \angle ECB$

$= \angle ABC + \angle ECB$, [যেহেতু $AB = AC$]

উভয়পক্ষ থেকে $\angle ABC$ বাদ দিলে,

$\angle DBC = \angle ECB$, [প্রমাণিত]

উদাহরণ ২। চিত্রে, ΔABC- এ $AB = AC$ এবং $BD = CE$. প্রমাণ কর যে, $AD = AE$.

প্রমাণ : ΔABC-এ $AB = AC$.

সুতরাং, $\angle ACB = \angle ABC$ (উপপাদ্য–৮)

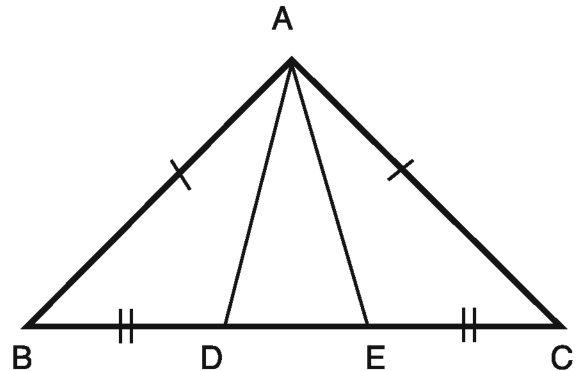
এখন ΔABD ও ΔACE- এ

$AB = AC, BD = CE$

এবং $\angle ABD = \angle ACE$

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACE$, [উপপাদ্য–৭]

সুতরাং, $AD = AE$.   [প্রমাণিত]



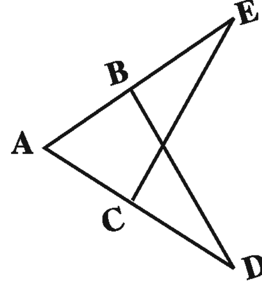
অনুশীলনী ২·২

১। প্রমাণ কর যে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিকে উভয়দিকে বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ দুইটি পরস্পর সমান।

২। চিত্রে, $AD = AE, BD = CE$

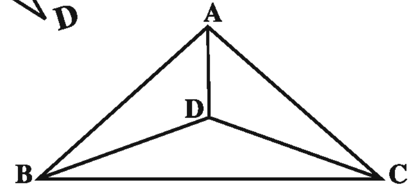
এবং $\angle AEC = \angle ADB$

প্রমাণ কর যে, $AB = AC$.



৩। চিত্রে, ΔABC এবং ΔDBC দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

প্রমাণ কর যে, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$.

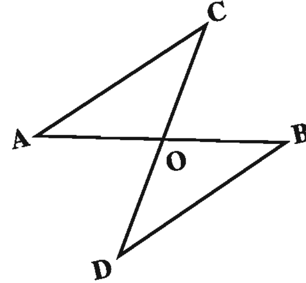


৪। প্রমাণ কর যে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির প্রান্তবিন্দু থেকে বিপরীত বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত মধ্যমাদ্বয় সমান।

৫। চিত্রে, AB ও CD পরস্পর O বিন্দুতে

সমদ্বিখণ্ডিত হয়েছে এবং $OA = OC$.

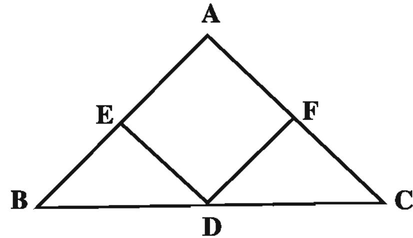
প্রমাণ কর যে, $\angle ODB = \angle OBD$.



৬। চিত্রে, ΔABC-এ $AB = AC, BD = DC$

এবং $BE = CF$.

প্রমাণ কর যে, $\angle EDB = \angle FDC$

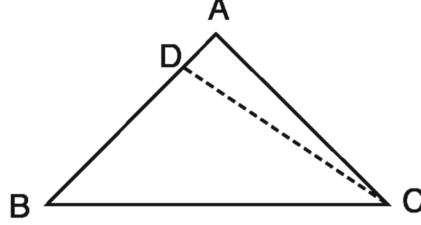


৭। চতুর্ভুজ ABDC- এ $AB = AC$. AD, $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ কর যে, $BD= CD$.

৮। প্রমাণ কর যে, সমবাহু ত্রিভুজের কোণগুলো পরস্পর সমান।

উপপাদ্য – ৯

যদি কোনো ত্রিভুজের দুইটি কোণ পরস্পর সমান হয়, তবে এদের বিপরীত বাহুদ্বয়ও পরস্পর সমান হবে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC-এ $\angle ACB = \angle ABC$.

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB = AC$

প্রমাণ : যদি AB ও AC সমান না হয়, তবে মনি করি, $AB > AC$.

এখন BA থেকে CA এর সমান করে BD অংশ কেটে নেওয়া হল এবং C, D যোগ করি।

এখন, ΔDCB ও ΔABC এ

$BD = AC$, BC সাধারণ বাহু

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle DBC =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle ACB$

সুতরাং, $\Delta DCB \cong \Delta ABC$

$\therefore \angle DCB = \angle ABC$

কিন্তু $\angle ABC = \angle ACB$ (দেওয়া আছে)

$\therefore \angle DCB = \angle ACB$.

কিন্তু এটা অসম্ভব, কারণ কোণ দুইটির একটি অপরটির অংশ।

$\therefore AB > AC$ হতে পারে না।

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে, $AC > AB$ হতে পারে না।

$\therefore AB = AC$ [প্রমাণিত]

উদাহরণ ১। চিত্রে, ΔABC- এ AB এবং AC এর উপর যথাক্রমে DE এবং DF দুইটি লম্ব।

$DE = DF$ এবং $BE = CF$.

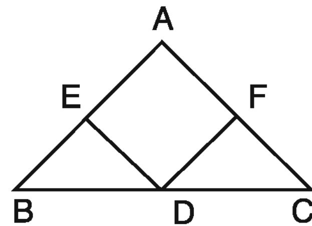
প্রমাণ কর যে, $AB = AC$

প্রমাণ : ΔBDE এবং ΔCFD এর মধ্যে

$DE = DF$, $BE = CF$ [প্রদত্ত]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle BED =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle CFD$,

[যেহেতু প্রত্যেকে এক সমকোণ]

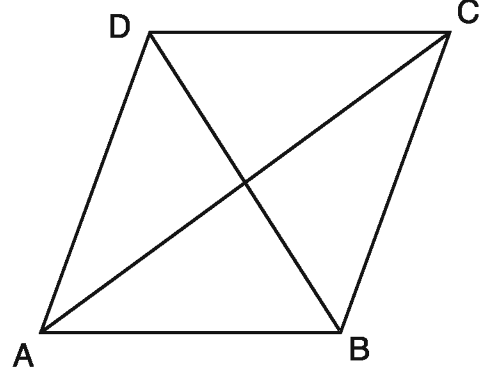


$\therefore \Delta BDE \cong \Delta CFD$ [উপপাদ্য–৭]

সুতরাং, $\angle B = \angle C$ [সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ কোণ]

$\therefore AC \cong AB$ [উপপাদ্য–৯]

উদাহরণ ২। চিত্রে, ABCD চতুর্ভুজে $AD=AB$, $\angle ADC = \angle ABC$.
প্রমাণ কর যে, $BC = CD$.



অঙ্কন : B, D যোগ করি।
প্রমাণ : ΔADB-এ $AD = AB$. (দেওয়া আছে)
$\therefore \angle ADB = \angle ABD$. (উপপাদ্য–৮)
আবার, $\angle ADC = \angle ABC$, (দেওয়া আছে)
$\therefore \angle ADB + \angle CDB = \angle ABD + \angle CBD$
$= \angle ADB + \angle CBD$
[যেহেতু $\angle ADB = \angle ABD$]
বা, $\angle CDB = \angle CBD$ (উভয়পক্ষ থেকে $\angle ADB$ বাদ দিয়ে)
$\therefore$ $BC = CD$. [উপপাদ্য–৯] [প্রমাণিত]

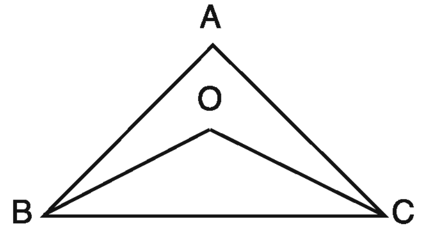
অনুশীলনী ২.৩

১। ΔABC-এ $AD \perp BC$ এবং $BD = CD$। প্রমাণ কর যে, ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

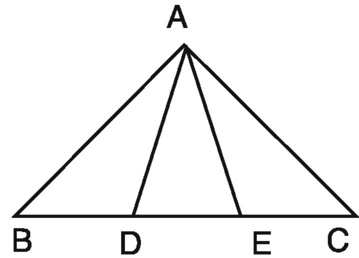
২। ΔABC-এ $\angle A = \angle C$ এবং $AC = BC$. প্রমাণ কর যে, ABC সমবাহু ত্রিভুজ।

৩। ΔABC-এ BC, AC ও AB এর উপর যথাক্রমে D, F এবং E এরূপ তিনটি বিন্দু যেন $BD = DC$, $ED = FD$ এবং $\angle EDB = FDC$. প্রমাণ কর যে, $AB = AC$.

৪। চিত্রে, ΔABC-এ BO এবং CO যথাক্রমে $\angle ABC$ এবং $\angle ACB$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে এবং $BO = CO$. প্রমাণ কর যে, $AB = AC$



৫। চিত্রে, ΔABC-এ $\angle B = \angle C$ এবং $BD = EC$.
প্রমাণ কর যে, ΔADE সমদ্বিবাহু।

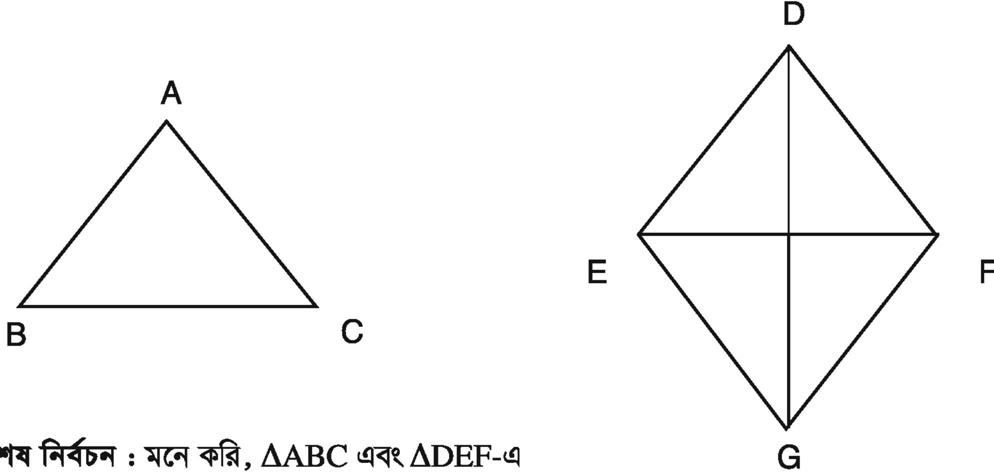


৬। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের কোণ তিনটি পরস্পর সমান হলে, তার বাহু তিনটি পরস্পর সমান হবে।

৭। কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

উপপাদ্য - ১০

যদি একটি ত্রিভুজের তিন বাহু অপর একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC এবং ΔDEF-এ
$AB = DE$, $AC = DF$ এবং $BC = EF$.
প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

প্রমাণ : মনে করি, BC এবং EF বাহু যথাক্রমে ΔABC এবং ΔDEF এর বৃহত্তম বাহুদ্বয়।

এখন ΔABC-কে ΔDEF-এর উপর এমনভাবে স্থাপন করি, যেন B বিন্দু E বিন্দুর উপর এবং BC বাহু তার সমান বাহু EF বরাবর এবং EF রেখার যেপাশে D বিন্দু আছে, A বিন্দুকে তার বিপরীত পাশে স্থাপন করি। মনে করি, G বিন্দু A বিন্দুর নতুন অবস্থান।

যেহেতু $BC = EF$, C বিন্দু F বিন্দুর উপর পড়বে,

সুতরাং, ΔGEF হবে ΔABC-এর নতুন অবস্থান।

অর্থাৎ, $EG = BA$, $FG = CA$ ও $\angle EGF = \angle BAC$.

D, G যোগ করি।

এখন, ΔEGD-এ $EG = ED$. [কারণ $EG = BA = ED$]

$\therefore \angle EDG = \angle EGD$ [উপপাদ্য–৮]

আবার, ΔFGD-এ $FG = FD$, [কারণ $FG = CA = FD$]

$\therefore \angle FDG = \angle FGD$. [উপপাদ্য–৮]

সুতরাং, $\angle EDG + \angle FDG = \angle EGD + \angle FGD$

বা, $\angle EDF = \angle EGF$

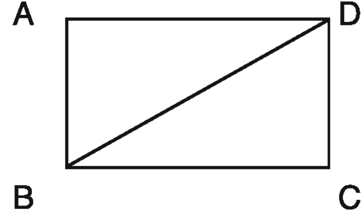
অর্থাৎ, $\angle BAC = \angle EDF$.

অতএব, ΔABC ও ΔDEF-এ $AB = DE$, $AC = DF$ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle BAC$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle EDF$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$. [উপপাদ্য–৭] (প্রমাণিত)

উদাহরণ ১। প্রমাণ কর যে, আয়তের কর্ণ আয়তকে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

বিশেষ নির্বচন : ABCD একটি আয়ত এবং BD এর একটি কর্ণ।
প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta ABD \cong \Delta BCD$



প্রমাণ : ΔABD এবং ΔBCD -এ
$AB = DC, AD = BC$
[$\because$ আয়তের বিপরীত বাহুগুলো সমান
এবং BD উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু]
$\therefore \Delta ABD \cong BCD$. [উপপাদ্য– ১০]

অনুশীলনী ২.৪

১। ΔABC এ $AB = AC$ এবং O, ΔABC এর অভ্যন্তরে এমন একটি বিন্দু যেন $OB = OC$. প্রমাণ কর যে, $\angle AOB = \angle AOC$.

২। O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে OP, AB জ্যা এর সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ কর যে, $\angle OPA = \angle OPB$.

৩। ΔABC এর AB ও AC বাহুতে যথাক্রমে D ও E এমন দুইটি বিন্দু যেন $BD = CE$ এবং $BE = CD$. প্রমাণ কর যে, $\angle ABC = \angle ACB$.

৪। দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ABC ও DBC এর ভূমি BC এর একই পাশে অবস্থিত। প্রমাণ কর যে, A ও D সংযোজিত রেখা শিরঃকোণ দুইটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

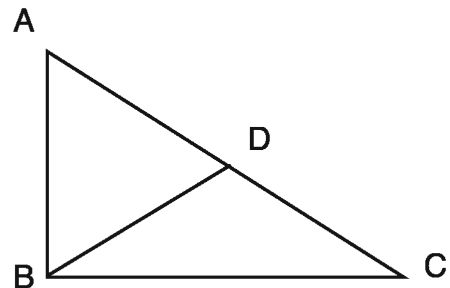
৫। ABCD চতুর্ভুজে $AB = CD$ এবং $BD = AC$ এবং BD ও AC পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করবে। প্রমাণ কর যে, BOC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

৬। O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে, জ্যা BC = জ্যা ED. প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = \angle EOD$.

উপপাদ্য - ১১

কোনো ত্রিভুজের একটি বাহু অপর একটি বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হলে, বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC-এ $AC > AB$.
প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ABC > \angle ACB$.



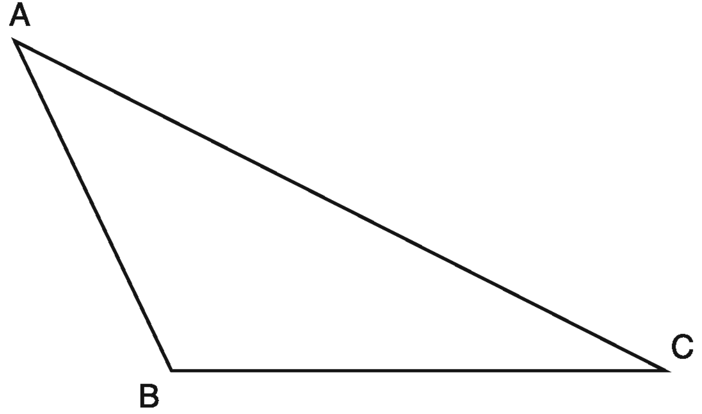
অঙ্কন : AC থেকে AB এর সমান করে AD অংশ কাটি এবং B, D যোগ করি।

প্রমাণ : ΔABD- এ $AB = AD$,
$\therefore \angle ADB = \angle ABD$. [উপপাদ্য – ৮]

কিন্তু ΔBDC-এ বহিঃস্থ $\angle ADB > \angle BCD$.
কারণ, ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণ দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর।
$\therefore \angle ABD > \angle BCD$. বা, $\angle ABD > \angle ACB$
কিন্তু $\angle ABC > \angle ABD$। [যেহেতু $\angle ABD$ হল $\angle ABC$-এর একটি অংশ]
সুতরাং, $\angle ABC > \angle ACB$. (প্রমাণিত)

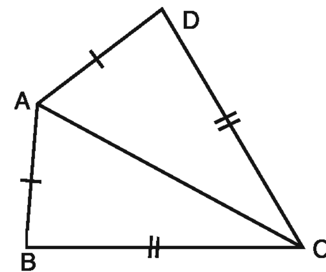
উপপাদ্য- ১২

কোন ত্রিভুজের একটি কোণ অপর একটি কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হলে, বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC- এর $\angle ABC > \angle ACB$.
প্রমাণ করতে হবে যে, $AC > AB$.
প্রমাণ : যদি AC বাহু AB বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর না হয়,
তবে $AC = AB$, অথবা $AC < AB$ হবে।
যদি $AC = AB$ হয়,
তবে $\angle ABC = \angle ACB$ হবে। [উপপাদ্য– ৮]
কিন্তু তা প্রদত্ত শর্তবিরোধী।
আবার, যদি $AC < AB$ হয়, তবে $\angle ABC < \angle ACB$ হবে। [উপপাদ্য–১১]
কিন্তু তাও প্রদত্ত শর্তবিরোধী।
সুতরাং, AC বাহু AB এর সমান বা AB থেকে ক্ষুদ্রতর হতে পারে না। $\therefore AC > AB$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ ১। চতুর্ভুজ ABCD-এ $AB = AD, BC = CD$ এবং $BC > AB$.
প্রমাণ কর যে, $\angle DAB > \angle DCB$.



বিশেষ নির্বচন : ABCD চতুর্ভুজে $AB = AD$, $BC = CD$ এবং $BC > AB$,
প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle DAB > \angle DCB$
অঙ্কন : A, C যোগ করি।
প্রমাণ : ΔABC-এ $BC > AB$
সুতরাং $\angle BAC > \angle BCA$...... (১) [উপপাদ্য ১১]
আবার, ΔADC-এ $CD > AD$
সুতরাং, $\angle DAC > \angle DCA$......... (২) [উপপাদ্য ১১]
(১) এবং (২) যোগ করে আমরা পাই,
$\angle BAC + \angle DAC > \angle BCA + \angle DCA$ অর্থাৎ $\angle DAB > \angle DCB$. [প্রমাণিত]

অনুশীলনী ২·৫

১। ΔABC-এ $AB>AC$ এবং $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ কর যে, $PB>PC$

২। ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং এর $AB = AC$. BC-কে যে-কোনো দূরত্ব D পর্যন্ত বাড়ানো হল। প্রমাণ কর যে, $AD>AB$.

৩। ABCD চতুর্ভুজে $AB = AD$, $BC = CD$ এবং $CD> AD$.
প্রমাণ কর যে, $\angle DAB > \angle BCD$.

৪। ΔABC-এ $AB = AC$ এবং D, BC-এর উপর একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $AB>AD$.

৫। ΔABC- এ $AB\perp AC$ এবং D, AC- এর উপর একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $BC>BD$.

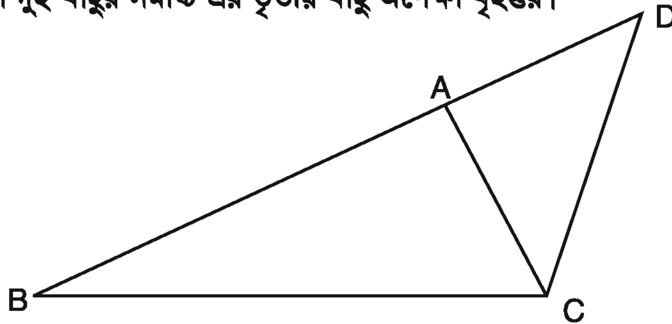
৬। প্রমাণ কর যে, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজই বৃহত্তম বাহু।

৭। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণ বৃহত্তম।

৮। ABCD চতুর্ভুজের $\angle B = \angle C$ এবং $AB > CD$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\angle D> \angle A$.

উপপাদ্য - ১৩

ত্রিভুজের যে-কোনো দুই বাহুর সমষ্টি এর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

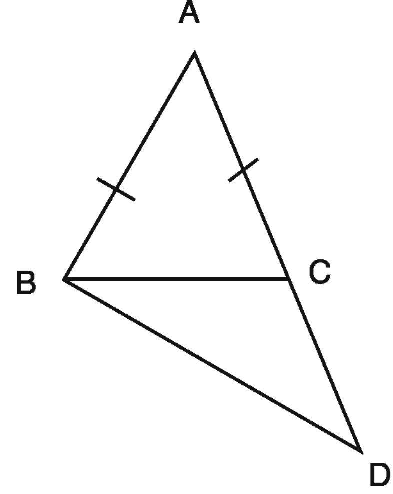


বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। প্রমাণ করতে হবে যে, ΔABC এর যে-কোনো দুই বাহুর সমষ্টি এর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।
ধরি, BC ত্রিভুজটির বৃহত্তম বাহু। তাহলে $AB + AC > BC$ প্রমাণ করাই যথেষ্ট।

অঙ্কন : BA-কে D পর্যন্ত বর্ধিত করি, যেন $AD = AC$ হয়। C, D যোগ করি।

প্রমাণ : ΔADC-এ $AD = AC$.
$\therefore \angle ACD = \angle ADC$. [উপপাদ্য–৮]
কিন্তু $\angle BCD > \angle ACD$, [কারণ $\angle ACD$, $\angle BCD$ এর একটি অংশ]
$\therefore \angle BCD > \angle ADC$
অর্থাৎ, ΔBCD- এ $\angle BCD > \angle BDC$.
$\therefore BD>BC$, [উপপাদ্য–১২]
কিন্তু $BD = AB + AD = AB + AC$, [যেহেতু $AC = AD$]
$\therefore AB + AC > BC$. (প্রমাণিত)

উদাহরণ ১। ΔABC- এ $AB = AC$ এবং D বিন্দু AC- এর বর্ধিতাংশের উপর অবস্থিত। প্রমাণ কর যে, $BD>CD$.

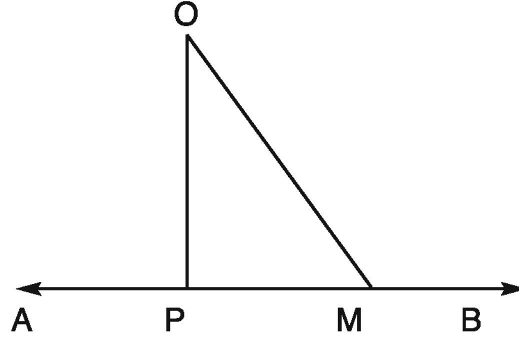


বিশেষ নির্বচন : ΔABC- এ $AB = AC$
এবং D বিন্দু AC এর বর্ধিতাংশের উপর অবস্থিত।
প্রমাণ করতে হবে যে, $BD>CD$.

প্রমাণ : ΔABD - এ
$AB + BD > AD$, [উপপাদ্য–১৩]
বা, $AB + BD > AC + CD$
বা, $AB + BD > AB + CD$, [দেওয়া আছে, $AB = AC$]
বা, $BD > CD$, [উভয় পক্ষ থেকে AB বাদ দিয়ে] [প্রমাণিত]

উপপাদ্য - ১৪

কোনো সরলরেখার বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে উক্ত রেখা পর্যন্ত যতগুলো রেখাংশ টানা যায় তন্মধ্যে লম্ব রেখাংশটি ক্ষুদ্রতম।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, AB একটি রেখা এবং O তার বহিঃস্থ একটি বিন্দু।
প্রমাণ করতে হবে যে, O থেকে AB এর উপর যতগুলো রেখাংশ টানা যায় তন্মধ্যে লম্বই ক্ষুদ্রতম।
ধরি, AB-এর উপর OP একটি লম্ব রেখাংশ ও অপর একটি রেখাংশ OM টানা হয়েছে। তাহলে, এটি প্রমাণ করলেই যথেষ্ট হবে যে, $OP < OM$.

প্রমাণ : ΔOPM-এ $\angle OPM =$ এক সমকোণ $= \angle OPA$.
কিন্তু, $\angle OPA > \angle OMP$, কারণ ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর।
$\therefore \angle OPM > \angle OMP$,
সুতরাং, $OM> OP$.[উপপাদ্য–১২]
অর্থাৎ, $OP < OM$. (প্রমাণিত)

অনুশীলনী ২.৬

১। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যে-কোনো দুই বাহুর অন্তর তার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

২। ΔABC- এর অভ্যন্তরে D একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $AB + AC > BD + CD$.

৩। ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD দুইটি কর্ণ। প্রমাণ কর যে, $AC + BD > BC + AD$.

৪। ΔABC- এর অভ্যন্তরে O যে কোনো একটি বিন্দু।
প্রমাণ কর যে, $AB + BC + CA > OA + OB + OC$.

৫। ΔABC-এর অভ্যন্তরে O যে-কোনো একটি বিন্দু এবং $AB > OC$.
প্রমাণ কর যে, $AO + BO > CO$.

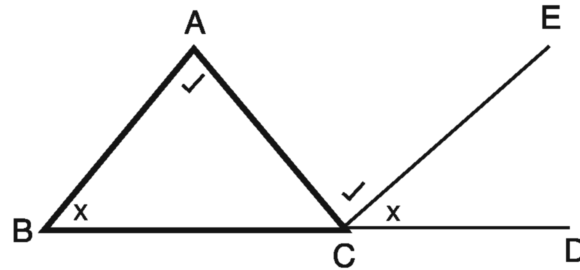
৬। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের মধ্যমাগুলোর সমষ্টি তার বাহুগুলোর পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

৭। প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের সমষ্টি তার বাহুগুলোর পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

৮। প্রমাণ কর যে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু থেকে ভূমির উপর যতগুলো রেখাংশ টানা যায়, তন্মধ্যে ক্ষুদ্রতম হল মধ্যমাটি।

উপপাদ্য - ১৫

ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ।
প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB =$ দুই সমকোণ

অঙ্কন : BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করি এবং BA রেখার সমান্তরাল করে CE রেখা আঁকি।

প্রমাণ : যেহেতু BA ও CE রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল এবং AC রেখা তাদের ছেদক,
$\therefore \angle BAC =$ একান্তর $\angle ACE$.
আবার, যেহেতু BA ও CE রেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল এবং BD রেখা তাদের ছেদক,
$\therefore \angle ABC =$ অনুরূপ $\angle ECD$.
সুতরাং, $\angle BAC + \angle ABC = \angle ACE + \angle ECD = \angle ACD$ .... (১)
এখন সমীকরণ (১) এর উভয়পক্ষে $\angle ACB$ যোগ করে পাই,
$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \angle ACD + \angle ACB$.
কিন্তু $\angle ACD + \angle ACB =$ দুই সমকোণ। [উপপাদ্য –১]
$\therefore \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB =$ দুই সমকোণ। [প্রমাণিত]

অনুসিদ্ধান্ত ১। ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা এর বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

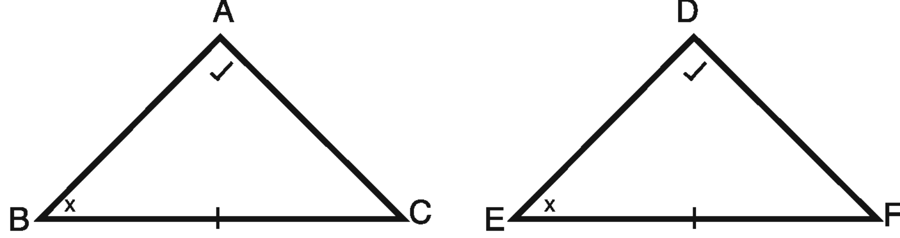
অনুসিদ্ধান্ত ২। ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

অনুসিদ্ধান্ত ৩। সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ পরস্পর পূরক।

অনুসিদ্ধান্ত ৪। সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেকটি কোণের পরিমাণ $60°$।

উপপাদ্য - ১৬

যদি একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও একটি বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও অনুরূপ বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC ও ΔDEF-এ
$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ এবং BC বাহু = অনুরূপ EF বাহু।
প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

প্রমাণ : ΔABC- এ $\angle A + \angle B + \angle C$ = দুই সমকোণ [উপপাদ্য – ১৫]
এবং ΔDEF- এ $\angle D + \angle E + \angle F$ = দুই সমকোণ [উপপাদ্য – ১৫]
$\therefore\ \angle A + \angle B + \angle C = \angle D + \angle E + \angle F$.
যেহেতু $\angle A = \angle D$ এবং $\angle B = \angle E$,
$\therefore\ \angle C = \angle F$.
এখন ΔABC- কে ΔDEF এর উপর এমনভাবে স্থাপন করি যেন, B বিন্দু E বিন্দুর উপর, BC বাহু EF বাহু বরাবর এবং EF রেখার যে পাশে D আছে A বিন্দু যেন ঐপাশে পড়ে।
যেহেতু $BC = EF$. অতএব C বিন্দু F বিন্দুর উপর অবশ্যই পড়বে।
আবার $\angle B = \angle E$ বলে, BA বাহু DE বাহু বরাবর পড়বে।
এবং $\angle C = \angle F$ বলে, CA বাহু FD বাহু বরাবর পড়বে।
$\therefore$ BA এবং CA বাহুর সাধারণ বিন্দু A, ED ও FD বাহুর সাধারণ বিন্দু D এর উপর পড়বে।
অর্থাৎ ΔABC, ΔDEF এর উপর সমাপতিত হবে।
$\therefore\ \Delta ABC \cong \Delta DEF$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ ১। প্রমাণ কর যে, কোনো ত্রিভুজের একটি কোণ যদি এর অপর দুইটি কোণের সমষ্টির সমান হয়, তবে ত্রিভুজটি সমকোণী।

প্রমাণ : আমরা জানি যে, ABC ত্রিভুজে

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ [যেহেতু $\angle A = \angle B + \angle C$]

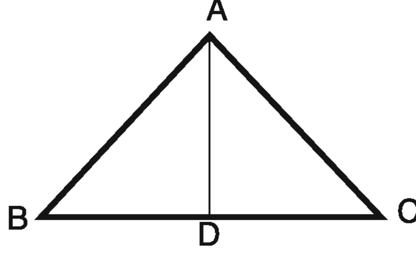
$\therefore\ \angle A + \angle A = 180°$

$\therefore\ 2\angle A = 180°$

$\therefore\ \angle A = 90°$

সুতরাং, ΔABC সমকোণী ত্রিভুজ।

উদাহরণ ২। প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক যদি ভূমির উপর লম্ব হয়, তবে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।



বিশেষ নির্বচন : চিত্রে, ΔABC এর শিরঃকোণ A- এর সমদ্বিখণ্ডক AD ভূমি BC এর D বিন্দুতে লম্ব।
প্রমাণ করতে হবে যে, $AB = AC$.

প্রমাণ : ΔABD এবং ΔACD- এ

$\angle BAD = \angle CAD$ [$\because$ AD হল $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক]

$\angle ADB = \angle ADC$ [$\because$ AD হল BC এর উপর লম্ব]

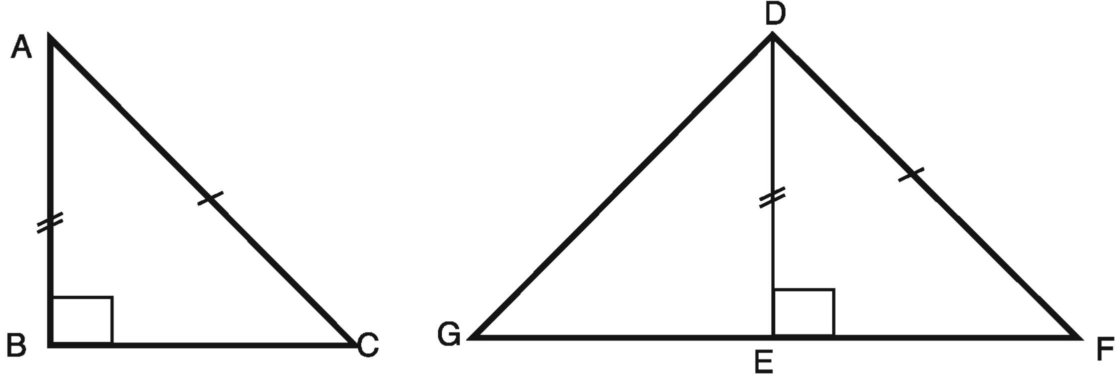
এবং AD সাধারণ বাহু।

সুতরাং, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ [উপপাদ্য১৬]

অতএব, $AB = AC$ [প্রমাণিত]

উপপাদ্য - ১৭

দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজদ্বয় সমান হলে এবং একটির এক বাহু অপরটির অপর এক বাহুর সমান হলে, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হবে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ও DEF সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে অতিভুজ AC = অতিভুজ DF এবং AB = DE.
প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

প্রমাণ : ΔABC কে ΔDEF এর উপর এমনভাবে স্থাপন করি যেন B বিন্দু E বিন্দুর উপর, BA বাহু ED বাহু বরাবর এবং C বিন্দু ED রেখার যে পাশে F বিন্দু আছে তার বিপরীত পাশে পড়ে।

ধরি, G বিন্দু C বিন্দুর নতুন অবস্থান।

যেহেতু $AB = DE$, A বিন্দু D বিন্দুর উপর পড়বে। ফলে ΔDEG হবে ΔABC এর নতুন অবস্থান।

সুতরাং DG = AC = DF. ∠DEG = ∠DEF = ∠ABC = এক সমকোণ এবং ∠DGE = ∠ACB.
যেহেতু ∠DEF + ∠DEG = এক সমকোণ + এক সমকোণ = দুই সমকোণ.

∴ GEF একটি সরলরেখা।

এখন, যেহেতু Δ DGF- এ, DG = DF

∴ ∠DFE = ∠DGE [উপপাদ্য – ৮]

সুতরাং, ∠DFE = ∠ACB.

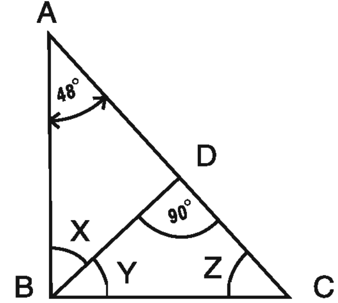
এখন ΔABC ও ΔDEF- এ

∠ABC = ∠DEF [∵ প্রত্যেকে এক সমকোণ]

∠ACB = ∠DFE এবং AB বাহু = অনুরূপ DE বাহু।

সুতরাং, Δ ABC ≅ ΔDEF. [উপপাদ্য ১৬] (প্রমাণিত)

অনুশীলনী ২.৭



১। চিত্রে, ABC এর ∠ABC = 90°
∠BAC = 48° এবং
BD, AC এর উপর লম্ব।
অবশিষ্ট কোণগুলোর মান নির্ণয় কর।

২। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুতে অবস্থিত কোণটির মান 50°। অবশিষ্ট কোণ দুইটির মান নির্ণয় কর।

৩। প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজের চারটি কোণের সমষ্টি চার সমকোণের সমান।

৪। দুইটি রেখা PQ এবং RS পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। PQ এবং RS-এর উপর যথাক্রমে L এবং E দুইটি বিন্দু, যেন, LM ⊥ RS, EF ⊥ PQ. প্রমাণ কর যে, ∠MLO = ∠FEO.

৫। ΔABC- এর ∠B ও ∠C এর অন্তর্দ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে,

$$\angle BDC = 90° + \frac{1}{2} \angle A .$$

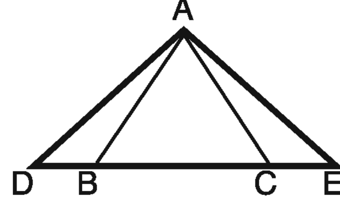
৬। Δ ABC- এর AC ⊥ BC; E, AC এর বর্ধিতাংশের উপর যে-কোনো বিন্দু এবং ED ⊥ AB. ED এবং BC পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করবে। প্রমাণ কর যে, ∠CEO = ∠ DBO.

৭। Δ ABC- এ ∠B ও ∠C এর বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হল। দেখাও যে,

$$\angle BOC = 90° - \frac{1}{2} \angle A .$$

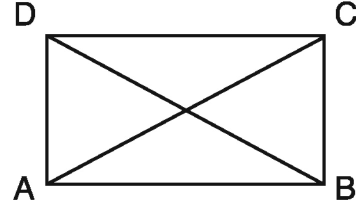
৮। প্রমাণ কর যে, কোনো ত্রিভুজের শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক যদি ভূমির উপর লম্ব হয়, তবে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

৯। চিত্রে, ΔABC-এ $AB = AC$ এবং $\angle BAD = \angle CAE$. প্রমাণ কর যে, $BD = CE$.

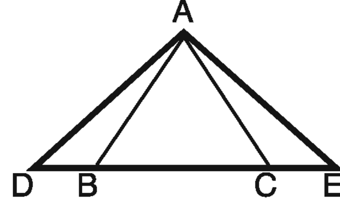


১০। ABCD চতুর্ভুজে AC, $\angle BAD$ এবং $\angle BCD$ এর সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ কর যে, $\angle B = \angle D$.

১১। চিত্রে, ABCD চতুর্ভুজের AB এবং CD পরস্পর সমান ও সমান্তরাল এবং AC ও BD কর্ণ দুইটি O বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ কর যে, $AD = BC$.



১২। চিত্রে ΔABC- এ $AB = AC$. BC- কে উভয়দিকে D ও E পর্যন্ত বাড়ানো হয়েছে এবং $\angle DAB = \angle EAC$. প্রমাণ কর যে, $AD = AE$.



১৩। প্রমাণ কর যে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির প্রান্তবিন্দুদ্বয় থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় পরস্পর সমান।

১৪। প্রমাণ কর যে, কোনো ত্রিভুজের ভূমির প্রান্ত বিন্দুদ্বয় থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় যদি সমান হয়, তবে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

১৫। ABCD চতুর্ভুজের $AB = AD$ এবং $\angle B = \angle D =$ এক সমকোণ।
প্রমাণ কর যে, $\Delta ABC \cong \Delta ADC$

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে ১ - ৩ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

চিত্রে, ABC এর BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হয়েছে। CE, ACD এর সমদ্বিখণ্ডক।
$AB \parallel CE$ এবং $\angle ECD = 60^\circ$

১। $\angle BAC$ এর মান নিচের কোনটি ?

ক. 30° খ. 45°
গ. 60° ঘ. 120°

২। $\angle ACD$ এর মান নিচের কোনটি ?

ক. 60° খ. 90°
গ. 120° ঘ. 180°

৩। ΔABC কোন ধরনের ত্রিভুজ ?

ক. স্থূলকোণী খ. সমদ্বিবাহু
গ. সমবাহু ঘ. সমকোণী

৪। ΔABC এ $A = 70^\circ$, $B = 40^\circ$ হলে, ΔABC কী ধরনের ত্রিভুজ ?

ক. স্থূলকোণী খ. সমকোণী
গ. সমবাহু ঘ. সমদ্বিবাহু

৫। একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু যথাক্রমে 5 সে.মি. এবং 4 সে. মি.। ত্রিভুজের অপর বাহুটি নিচের কোনটি হতে পারে?

ক. 1 সে.মি. খ. 4 সে.মি.
গ. 9 সে.মি. ঘ. 10 সে.মি.

৬। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়কে বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণদ্বয়ের একটি 120° হলে, অপরটি কত?

ক. 120° খ. 90°
গ. 60° ঘ. 30°

৭। সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের একটি 40° হলে, অপর সূক্ষ্মকোণের মান নিচের কোনটি?

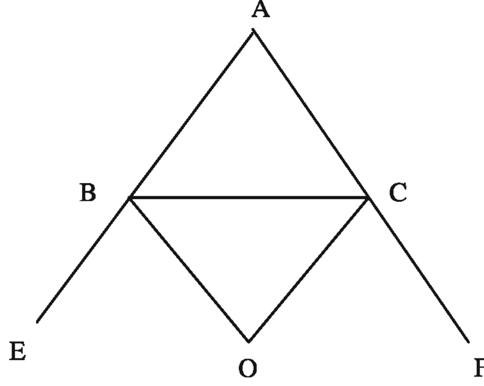
ক. 40° খ. 45°
গ. 50° ঘ. 60°

৮। কোনো ত্রিভুজের একটি কোণ অপর দুইটি কোণের সমষ্টির সমান হলে, ত্রিভুজটি কী ধরনের হবে?

ক. সমবাহু খ. সূক্ষ্মকোণী
গ. সমকোণী ঘ. স্থূলকোণী

সৃজনশীল প্রশ্ন

১।



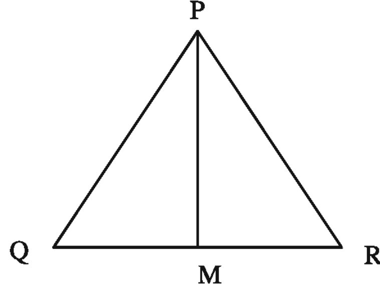
চিত্রে, ΔABC এ $AB = AC$, $\angle ACB = 60^\circ$; BO এবং CO যথাক্রমে $\angle B$ ও $\angle C$ এর বহির্দ্বিখণ্ডক।

ক. $\angle ABC$ এর মান কত?

খ. $\angle BAC$ এর মান নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $AB = BC$.

গ. প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$

২।



চিত্রে, $\angle QPM = \angle RPM$, $PM \perp QR$ এবং $\angle QPR = 90^\circ$

ক. $\angle QPM$ এর মান নির্ণয় কর ।

খ. $\angle PQM$ ও $\angle PMR$ এর মান কত ?

গ. $PQ = 6$ সে.মি. হলে, PR এর মান নির্ণয় কর।

৩। ΔABC এর AB ও AC বাহু পরস্পর সমান। A থেকে BC এর ওপর AD লম্ব।

ক. ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে চিত্রটি আঁক।

খ. দেখাও যে, $AD < AC$.

গ. প্রমাণ কর যে, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

৪। ΔABC এ $AB > AC$ এবং $\angle A$, $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ক. ওপরের তথ্যের আলোকে চিত্র অঙ্কন কর।

খ. দেখাও যে, $OB > OC$.

গ. প্রমাণ কর যে, $(AB + BC + CA) < 2(OB + OA + OC)$

৫। ΔPQR এর QR কে S পর্যন্ত বর্ধিত করা হয়েছে। $RT \parallel QP$ এবং $PQ = RT$.

ক. ওপরের তথ্যের আলোকে চিত্র অঙ্কন কর।

খ. দেখাও যে, $\angle PQR + \angle QPR = \angle PRS$.

গ. P,T যোগ করে প্রমাণ কর যে, $\Delta PQR \cong \Delta PRT$.

তৃতীয় অধ্যায়

ত্রিভুজ সংক্রান্ত সম্পাদ্য

প্রত্যেক ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ আছে :

(ক) তিনটি বাহু এবং (খ) তিনটি কোণ।

একটি ত্রিভুজের কতগুলো অঙ্গ অপর একটি ত্রিভুজের অনুরূপ অঙ্গের সমান হলে, দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হতে পারে। কেবল ঐ অঙ্গাগুলো দেওয়া থাকলে ত্রিভুজটির আকার নির্দিষ্ট হয় এবং ত্রিভুজটি আঁকা যায়।

ত্রিভুজের নিচের উপাত্তগুলো জানা থাকলে একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ সহজেই আঁকা যায় :

(১) দুইটি বাহু ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ,

(২) তিনটি বাহু, (দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর)

(৩) দুইটি কোণ ও একটি বাহু,

(৪) দুইটি বাহু ও তাদের একটির বিপরীত কোণ।

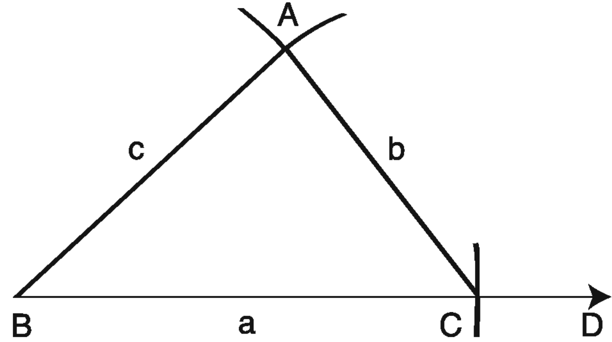
সম্পাদ্য – ৯

কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহু দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

a

b

c



মনে করি, একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু a, b, c দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : যে-কোনো রশ্মি BD থেকে a এর সমান করে BC কেটে নিই। B ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে যথাক্রমে c এবং b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BC এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে। A, B এবং A, C যোগ করি।

তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

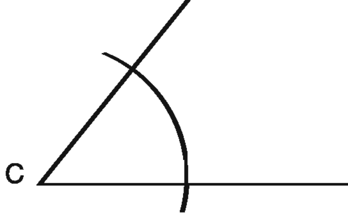
প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে, ΔABC-এ $BC= a$, $AC = b$ এবং $AB= c$.

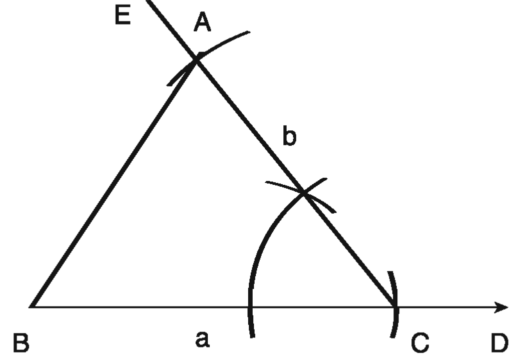
$\therefore$ ΔABC-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

মন্তব্য : উপপাদ্য ১৪ অনুযায়ী ত্রিভুজের দুই বাহুর সমষ্টি এর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। তাই প্রদত্ত বাহুগুলো এমন হতে হবে, যেন যে-কোনো দুইটির দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয়টির দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর হয়। তাহলেই ত্রিভুজটি আঁকা সম্ভব হবে।

সম্পাদ্য -১০

কোনো ত্রিভুজের দুইটি বাহু ও এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।





মনে করি, একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু a ও b এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle C$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : যে-কোনো রশ্মি BD থেকে a এর সমান করে BC নিই। BC রেখাংশের C বিন্দুতে প্রদত্ত $\angle C$ এর সমান $\angle BCE$ আঁকি। CE রেখাংশ থেকে b এর সমান করে CA নিই। A, B যোগ করি।

তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

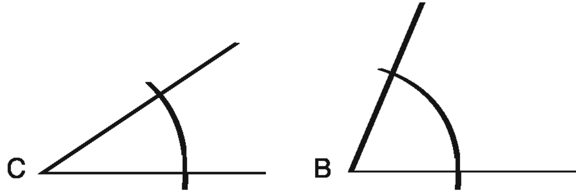
প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে ΔABC-এ

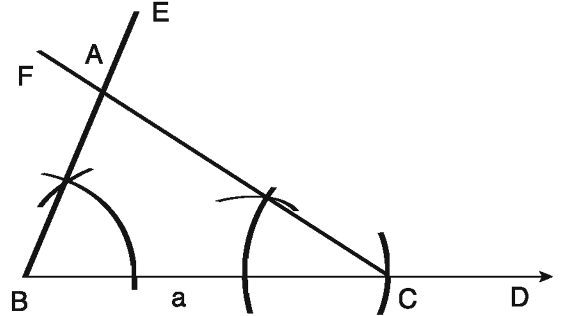
$BC = a$, $CA = b$ এবং $\angle ACB = \angle C$

$\therefore$ ΔABC-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য –১১

কোনো ত্রিভুজের একটি বাহু ও এর সংলগ্ন দুইটি কোণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।





মনে করি, একটি ত্রিভুজের একটি বাহু a এবং এর সংলগ্ন দুইটি কোণ $\angle B$ ও $\angle C$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : যে-কোনো রশ্মি BD থেকে a এর সমান করে BC নিই। BC রেখাংশের B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে $\angle CBE = \angle B$ এবং $\angle BCF = \angle C$ আঁকি। BE ও CF পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে, ΔABC-এ

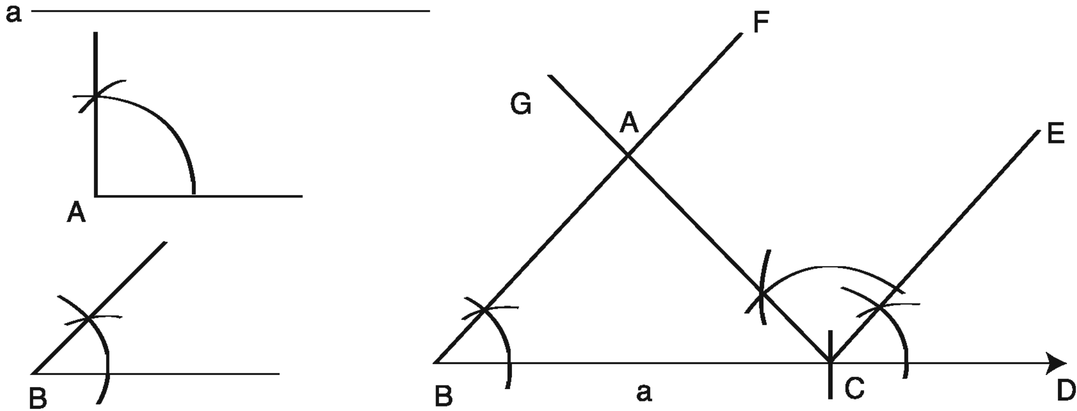
$BC = a$, $\angle ABC = \angle B$ এবং $\angle ACB = \angle C$

$\therefore$ ΔABC-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

মন্তব্য : উপপাদ্য ১৫ অনুযায়ী ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান, তাই প্রদত্ত কোণ দুইটি এমন হতে হবে যেন তাদের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ছোট হয়। এই শর্ত পালন করা না হলে কোনো ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব হবে না।

সম্পাদ্য - ১২

কোনো ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং এদের একটির বিপরীত বাহু দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



মনে করি, একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ∠ A ও ∠ B এবং ∠ A এর বিপরীত বাহু a দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : যে-কোনো একটি রশ্মি BD থেকে a এর সমান করে BC নিই। BC রেখাংশের B ও C বিন্দুতে প্রদত্ত ∠B এর সমান করে যথাক্রমে ∠CBF ও ∠DCE আঁকি। আবার CE রেখার C বিন্দুতে ওটির যে পাশে ∠B অবস্থিত তার বিপরীত পাশে ∠ A এর সমান করে ∠ ECG আঁকি।

CG রেখা BF রেখাকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, Δ ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে, ∠ABC = ∠ECD. এই কোণ দুইটি অনুরূপ বলে BA || CE.

এখন BA || CE এবং AC তাদের ছেদক।

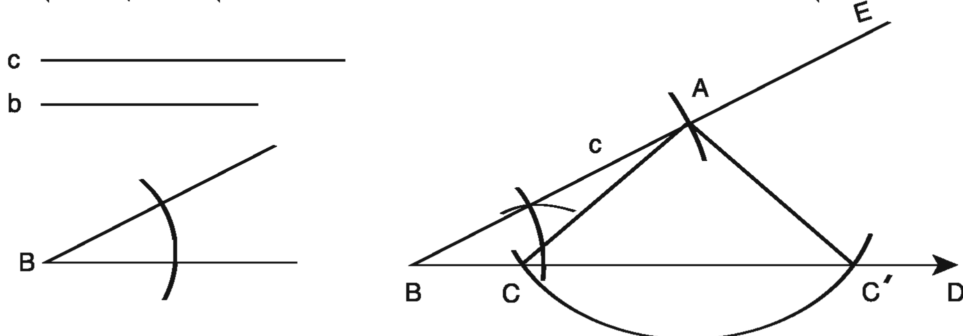
∴ ∠BAC =একান্তর ∠ACE = ∠A.

অতএব, Δ ABC -এ ∠ BAC = ∠ A, ∠ ABC = ∠ B এবং BC =a

সুতরাং, Δ ABC - ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য – ১৩

কোনো ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং এদের একটির বিপরীত কোণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



মনে করি, একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু b ও c এবং b বাহুর বিপরীত কোণ, ∠B দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : যে-কোনো রশ্মি BD এর B বিন্দুতে প্রদত্ত $\angle B$ এর সমান করে $\angle DBE$ আঁকি। BE রেখা থেকে c এর সমান করে BA নিই। এখন A বিন্দুকে কেন্দ্র করে b এর দৈর্ঘ্যের সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপটি BD রেখাকে C ও C′ বিন্দুতে ছেদ করে। A, C এবং A, C′ যোগ করি।

তাহলে, Δ ABC এবং Δ ABC′ - উভয়ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

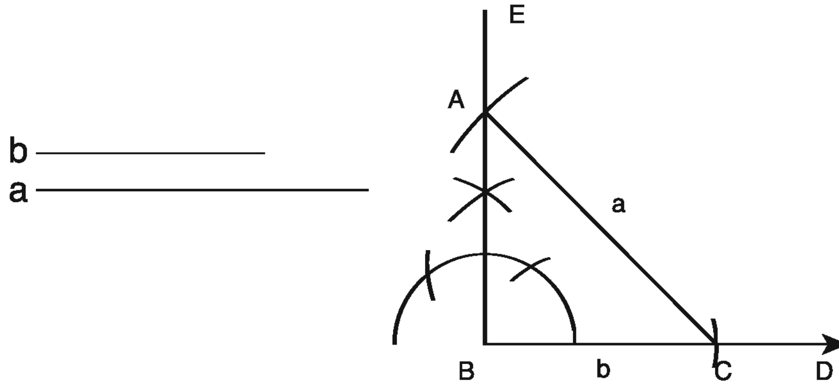
প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে, Δ ABC-এ $BA = c, AC = b$ এবং $\angle ABC = \angle B$

এবং Δ ABC′-এ $BA=c, AC'=b$ এবং $\angle ABC' = \angle B$

$\therefore$ Δ ABC এবং Δ ABC′ উভয়ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য - ১৪

কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর একটি বাহু দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



মনে করি, একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ a ও এর সংলগ্ন এক বাহু b দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

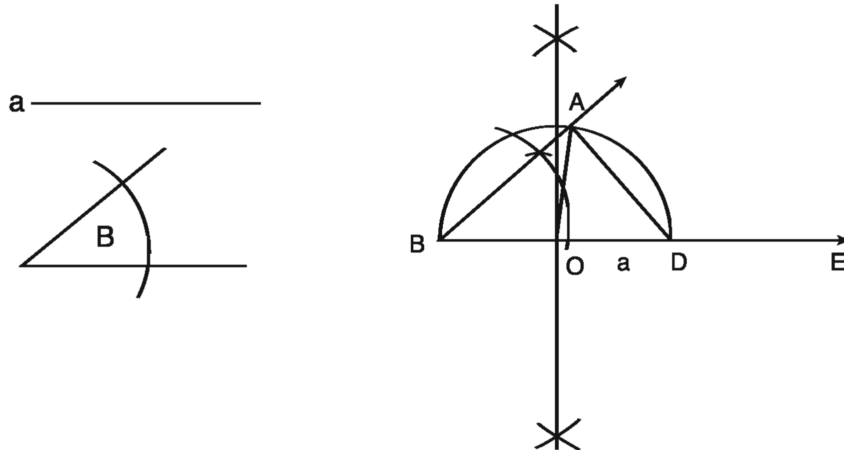
অঙ্কন : যে-কোনো রশ্মি BD থেকে b এর সমান করে BC নিই। B বিন্দুতে BE লম্ব আঁকি। C-কে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি, যেন এটি BE-কে A বিন্দুতে ছেদ করে। A, C যোগ করি। তাহলে, Δ ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে, অতিভুজ $AC = a, BC = b$ এবং $\angle ABC =$ এক সমকোণ।

$\therefore$ Δ ABC-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য - ১৫

কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি সূক্ষ্মকোণ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



মনে করি, একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ a এবং একটি সূক্ষ্ম কোণ $\angle B$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : যে-কোনো রশ্মি BE থেকে BD = a কেটে নিই। BD এর মধ্যবিন্দু O নির্ণয় করি। এখন O-কে কেন্দ্র করে OB এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি অর্ধবৃত্ত আঁকি। B বিন্দুতে $\angle DBA = \angle B$ আঁকি যেন BA রশ্মি অর্ধবৃত্তটিকে A বিন্দুতে ছেদ করে। A, D যোগ করি।
তাহলে, Δ ABD- ই উদ্দিস্ট সমকোণী ত্রিভুজ।

প্রমাণ : A ও O যোগ করি।
যেহেতু OB = OA. [বৃত্তের ব্যাসার্ধ] $\therefore \angle OAB = \angle OBA$ [উপপাদ্য–৮]
আবার OA = OD. [বৃত্তের ব্যাসার্ধ] $\therefore \angle OAD = \angle ODA$
$\therefore \angle OAB + \angle OAD = \angle OBA + \angle ODA$
বা, $\angle BAD = \angle ABD + \angle BDA$ = এক সমকোণ।
এখন BD = অতিভুজ a, $\angle ABD = \angle B$ এবং $\angle BAD$ = এক সমকোণ।
সুতরাং, Δ ABD হল নির্ণেয় সমকোণী ত্রিভুজ।

অনুশীলনী ৩.১

১। একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া হল। ত্রিভুজটি আঁকো।
(ক) 2 সে. মি., 3 সে. মি. ও 4 সে. মি.
(খ) 3 সে. মি., 4 সে. মি. ও 5 সে. মি.
(গ) 3·5 সে. মি., 2·7 সে. মি. ও 4·8 সে. মি.।

২। (ক) একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি ও অপর একটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকো।
(খ) একটি সমবাহু ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3·8 সে.মি.। ত্রিভুজটি আঁকো।

৩। একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু ও এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকো।
(ক) 2 সে.মি., 3·5 সে.মি., 60°
(খ) 3·8 সে.মি., 4·5 সে.মি., 45°।

৪। একটি ত্রিভুজের একটি বাহু ও এর সংলগ্ন দুইটি কোণ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকো।
(ক) 3 সে.মি., 30°, 45°
(খ) 3·5 সে.মি., 50°, 60°।

৫। একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও প্রথম কোণের বিপরীত বাহু দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।
(ক) 120°, 30°, 5 সে.মি.
(খ) 60°, 30°, 3 সে.মি.।

৬। একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু ও প্রথম বাহুর বিপরীতে কোণ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকো।
(ক) 5·4 সে.মি., 6 সে.মি., 60°
(খ) 4 সে.মি., 5 সে.মি, 30°।

৭। একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও এর সংলগ্ন বাহুর পরিমাণ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকো।
(ক) 7·6 সে.মি., 4·5 সে.মি.
(খ) 3 সে.মি., 2·8 সে.মি.।

৮। একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের অতিভুজ 6 সে. মি., ত্রিভুজটি আঁকো।

৯। একটি সমকোণী ত্রিভুজের একটি নির্দিষ্ট বাহু 5 সে. মি. এবং একটি সূক্ষ্মকোণ 40° দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকো।

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১। কোনো ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং এদের একটির বিপরীত কোণ দেওয়া থাকলে, সর্বাধিক কয়টি ত্রিভুজ আঁকা যাবে ?

ক. 1 খ. 2

গ. 3 ঘ. 4

২। কোনো ক্ষেত্রে ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব যখন তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে -

ক. 1 সে.মি., 2 সে.মি., 3 সে.মি. খ. 3 সে.মি., 4 সে.মি., 5 সে.মি.

গ. 2 সে.মি., 4 সে.মি., 6 সে.মি. ঘ. 3 সে.মি., 4 সে.মি., 7 সে.মি.

৩। i. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া থাকলে, ত্রিভুজটি আঁকা যায়।

ii. দুইটি বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হলে, ত্রিভুজটি আঁকা যায়।

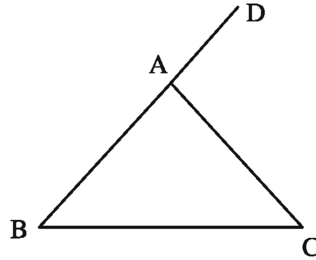
iii. কোনো ত্রিভুজের একাধিক স্থূলকোণ থাকতে পারে।

ওপরের তথ্য অনুসারে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও ii খ. ii ও iii

গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

নিচের চিত্র অনুসারে ৪ - ৫ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :



৪। C বিন্দুতে BA রেখার সমান্তরাল রেখা আঁকতে হলে, কোন কোণের সমান কোণ আঁকতে হবে ?

ক. $\angle ABC$ খ. $\angle ACB$

গ. $\angle BAC$ ঘ. $\angle CAD$

৫। $\angle CAD$ এর সমান নিচের কোনটি ?

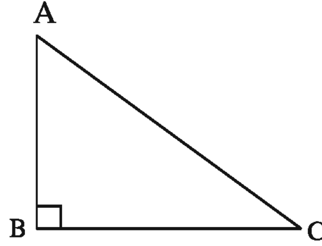
ক. $\angle BAC + \angle ACB$ খ. $\angle ABC + \angle ACB$

গ. $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC$ ঘ. $\angle ABC + \angle BAC$

সৃজনশীল প্রশ্ন

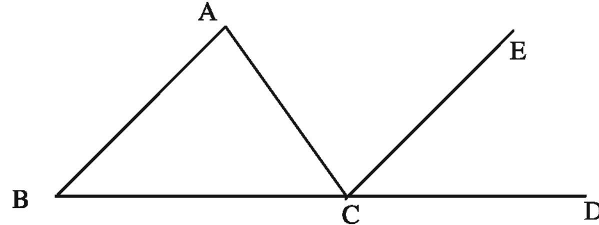
১। একই সরলরেখায় অবস্থিত নয় এমন তিনটি বিন্দু A, B ও C.
   ক. বিন্দু তিনটি দিয়ে একটি ত্রিভুজ আঁক।
   খ. অঙ্কিত ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু থেকে ভূমির ওপর লম্ব আঁক।
   গ. অঙ্কিত ত্রিভুজের ভূমি, সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের অতিভুজ হলে, ত্রিভুজটি আঁক।

২।



   ক. চিত্রের ত্রিভুজটির অতিভুজ কোনটি ?
   খ. অতিভুজের পরিমাণ সেন্টিমিটারে নির্ণয় কর এবং $\angle ACB$ এর সমান করে একটি কোণ আঁক।
   গ. একটি সমকোণী ত্রিভুজ আঁক, যার অতিভুজ চিত্রে অঙ্কিত ত্রিভুজের অতিভুজ অপেক্ষা 2 সে.মি. বড় এবং একটি কোণ, $\angle ACB$ এর সমান হয়।

৩।



চিত্রে, BA ও CE রেখা পরস্পর সমান্তরাল।
   ক. $\angle BAC$ ও $\angle ACE$ এর মধ্যে সম্পর্কটি লেখ।
   খ. দেখাও যে, $\angle BAC + \angle ABC = \angle ACD$.
   গ. একটি ত্রিভুজ আঁক, যার দুইটি কোণ $\angle ECD$ ও $\angle ABC$ এর সমান এবং একটি বাহু AB এর সমান হয়।

৪। একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু $a = 3\dot{}2$ সে.মি., $b = 4\dot{}5$ সে.মি. এবং একটি কোণ $\angle B = 30^{\circ}$.
   ক. $\angle B$ এর সমান একটি কোণ আঁক।
   খ. একটি ত্রিভুজ আঁক, যার দুই বাহু a ও b এর সমান এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle B$ এর সমান হয়।
   গ. এমন একটি ত্রিভুজ আঁক, যার একটি বাহু b এবং $\angle B$ এর বিপরীত বাহু a হয়।

৫। ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. এবং বাহু সংলগ্ন কোণ দুইটি 37° ও 46° ।
   ক. ত্রিভুজের অপর কোণের পরিমাণ কত ?
   খ. ত্রিভুজটি কী ধরনের এবং কেন ?
   গ. ত্রিভুজটি আঁক।

উত্তরমালা

পাটিগণিত

প্রশ্নমালা ১·১

১। (ক) ১৯ (খ) ২৮ (গ) ৩৬ (ঘ) ৪৫
(ঙ) ৬৩ (চ) ৮৬ (ছ) ৯০ (জ) ৯৬

২। (ক) ২৭ (খ) ৩১ (গ) ৮১ (ঘ) ২২২
(ঙ) ২৩৪ (চ) ৮৪৭ (ছ) ৪৪০ (জ) ১০০১

৩। (ক) ৩ (খ) ৩ (গ) ৫ (ঘ) ১

৪। (ক) ৫ (খ) ৩ (গ) ২ (ঘ) ৩ (ঙ) ৬

৫। ২০ ৬। ৫ ৭। ৩

প্রশ্নমালা ১·২

১। ০˙৭ ২। ১˙১ ৩। ·০৫ ৪। ২˙১৭ ৫। ১২˙৪ ৬। ˙০৭৩

৭। ˙০০৭৫ ৮। ২৫˙৩৮ ৯। ১˙০০১ ১০। ২˙২৩৬ ১১। ২˙৮২৮ ১২। ৩˙৪৯৪

১৩। ˙৭০৭ ১৪। ˙১৭৩ ১৫। ˙৭২৬ ১৬। ১˙৬৪৩ ১৭। ˙৫৪৮ ১৮। ১˙৮৩৩

১৯। ˙১৯২

প্রশ্নমালা ১.৩

১। (ক) $\frac{১}{৭}$ (খ) $\frac{৩}{১১}$ (গ) $\frac{১২}{১৭}$ (ঘ) $\frac{২১}{১০০}$ (ঙ) ১ $\frac{৬}{৭}$ (চ) ৯ $\frac{১}{৯}$ (ছ) ৬$\frac{১}{৫}$ (জ) ১০ $\frac{২}{৯}$

২। (ক) ˙৮৪৫ (প্রায়) (খ) ˙৫২৭ (প্রায়) (গ) ˙৭৬৪ (প্রায়) (ঘ) ২˙১০২ (প্রায়)
(ঙ) ২˙৯৯১ (প্রায়) (চ) ˙৩৯৫ (প্রায়) (ছ) ২˙০৫৮৭ (প্রায়)

প্রশ্নমালা ১.৪

১। ৬৪টি ২। ৩২টি ৩। ৪ জন ৪। ৮৪ জন, ৩৯৩ জন ৫। ৪৮, ৫৬

৬। ২২৫ ৭। ৫০ জন ৮। ৪৫, ৪৬ ৯। ৪৫, ৫০ ১০। ৩৫ জন ১১। ২৫ জন।

প্রশ্নমালা ২·১

১। (ক) ১৫ : ৭ (খ) ৫ : ৩ (গ) ৩১ : ১৮ (ঘ) ১০০০ : ৫০৭
(ঙ) ৫০০০ : ৭০০৯ (চ) ১ : ২

২। (ক) ৪৪ : ৬৫ (খ) ২০ : ৫৬১ (গ) ৭ : ৩ (ঘ) ৩২ : ৯

৩। ১৩ মি. ২০ সে.মি.	৪। ৫৪ বছর	৫। ৭ ঃ ১১	৬। ৩২˙০০ টাকা
৭। ১ ঃ ৫	৮। ২০ বছর	৯। ২৪ ঃ ২৫	১০। ২৯ ঃ ২১
১১। ২৪০ ঃ ২১০	১২। ৫৫ ঃ ৪২।		

প্রশ্নমালা ২·২

১। (ক) ৫ ঃ ১৫ ঃঃ ১৫ ঃ ৪৫ (খ) ২৫ ঃ ৪৫ ঃঃ ৪৫ ঃ ৮১ (গ) $\frac{৩}{৫}$ ঃ ১ ঃঃ ১ ঃ ১$\frac{২}{৩}$

(ঘ) ১˙৫ ঃ ৪˙৫ ঃঃ ৪˙৫ ঃ ১৩˙৫

২। (ক) ১৫	(খ) ৮	(গ) ০˙৫৫	(ঘ) $\frac{১}{২}$	
৩। (ক) ১৬	(খ) ৪৮	(গ) ২ $\frac{১}{৪}$	(ঘ) ২০০	(ঙ) ১২
৪। ১ ঃ ১০	৫। ২৪ কুইন্টাল	৬। ৩ ঃ ৬ ঃ ১২	৭। ১০০০˙০০ টাকা	
৮। ১৭টি	৯। ১৩ $\frac{১}{৩}$	১০। ২৫ দিন	১১। ৫,৬০০টি	
১২। ২৪৪ ঃ ২০৩	১৩। ৩৫ ঃ ৪২ ঃ ২৪	১৪। ৪০ লিটার।		

প্রশ্নমালা ২·৩

১। ২৮ ঃ ৩৫ ঃ ৫৫	২। ৪ কেজি
৩। ২৬ গ্রাম	৪। জৈব সার ১৪৪ বস্তা, রাসায়নিক সার ৩২ বস্তা
৫। এসিড ৮৮˙৯ কি.গ্রা., পানি ১১˙১ কি.গ্রা.	৬। ২৭০ টাকা, ৬৩০ টাকা, ১২৬০ টাকা
৭। ১৫০ টাকা, ১৯৫ টাকা, ২২৫ টাকা	৮। ৮০০ টাকা
৯। ২৮ ঃ ৫	১০। ৩০০ টাকা
১১। ১২৮ টাকা	১২। ৩১৫ টাকা, ৫২৫ টাকা
১৩। ৭৫০ টাকা, ৯০০ টাকা, ৮২৫ টাকা	১৪। ৭৫ টাকা, ৬০ টাকা, ৮৫ টাকা
১৫। ৭৫০ টাকা, ৫০০ টাকা	১৬। ৩১৬০ টাকা, ৩৬০০ টাকা
১৭। ১৬২৫ টাকা, ২২৭৫ টাকা, ১৩০০ টাকা	১৮। লিলি ৯০ টাকা, মলি ১৫০ টাকা, পিংকি ৭৫ টাকা
১৯। ১২ গ্রাম	২০। সুমন ১৩৮০ টাকা, জামাল ৯৬০ টাকা, দিলীপ ১২৬০ টাকা
২১। ৩১ ঃ ১৭।	

প্রশ্নমালা ৩·১

১। ২৮৮৭˙৫০ টাকা	২। ৩$\frac{১}{৪}$ কেজি	৩। ১২২ কেজি	৪। ১৭˙৫০ টাকা	৫। ৩৭৮ টাকা
৬। ৯০০০ টাকা	৭। ৩৩ জন	৮। ১০$\frac{৪}{৫}$ দিন	৯। ৭০ দিন	১০। ৩৪৫০০ টাকা

১১। ১৫ জন ১২। ১৬ $\frac{২}{৩}$ ১৩। ৫ দিন ১৪। ১০ দিন ১৫। ১৫০ জন
১৬। ৮ ঘণ্টা ১৭। ৬ দিন।

প্রশ্নমালা ৩·২

১। ২ জন ২। ১২ দিন ৩। ১৫ জন ৪। ১২০ জন ৫। ৩০ দিন ৬। ৯০ হেক্টর

৭। ১৭ দিন ৮। ৫ $\frac{৫}{১১}$ ঘণ্টা ৯। ৩ দিন ১০। ২০ দিন ১১। আজিজ ২৫ দিনে, কমল ১০০ দিনে

১২। ক ৩০ দিনে, খ ২০ দিনে, গ ৬০ দিনে ১৩। ১২ দিনে

১৪। ৫০ কি. মি. ১৫। ২ ঘণ্টা ৩০ মিনিট ১৬। ঘণ্টায় ১৮˙০৪ কি. মি. (প্রায়)

১৭। ৫ সেকেণ্ড ১৮। ১৮০ মিটার ১৯। ২১ সেকেণ্ড ২০। ৪ ঘণ্টা ২১। ২৫ মিনিট ২২। ৮ মিনিট পরে
২৩। ১৫ মিনিট ২৪। ঘণ্টায় ২ কি.মি. ২৫। ৫ ঘণ্টা ২৬। ঘণ্টায় ৬˙২৫ কি.মি.

২৭। ২৮০ কি.মি. ২৮। নৌকার গতিবেগ মিনিটে $\frac{১}{৬}$ কি.মি., স্রোতের গতিবেগ মিনিটে $\frac{১}{১২}$ কি.মি.

২৯। ৩২ দিন।

প্রশ্নমালা ৪·১

১। (ক) ৮০০ সে.মি., ৮০০০ মি.মি. (খ) ৭৪০ সে.মি., ৭৪০০ মি.মি. (গ) ১৩৯৬ সে.মি., ১৩৯৬০ মি.মি.
(ঘ) ০˙৭ সে.মি., ৭ মি.মি. (ঙ) ৪৭৯০ সে.মি., ৪৭৯০০ মি.মি.

২। (ক) ০˙৪৯৩ মি. (খ) ৭˙৫৬৫ মি. (গ) ২৩৮০০ মি. (ঘ) ৮০০০˙০৯ মি. (ঙ) ২৫০০০˙০৩ মি.

৩। (ক) ০˙৪০৩৯ কি.মি. (খ) ০˙০০৫৩৫৯ কি. মি. (গ) ০˙০৯৭৮৬৫ কি.মি.

(ঘ) ˙০০৯০৭৮ কি.মি. (ঙ) ০˙০৭৫২৫ কি.মি.

৪। (ক) ৩ মি. ৫ ডেসি মি. (খ) ৭ ডেসি মি. ৬ সে.মি. ৪ মি. মি. (গ) ৫৩ মি. ৭ ডেসি মি. (ঘ) ৫ সে.মি. ৬ মি.মি.।

প্রশ্নমালা ৪·২

১। ২০ বর্গ মি. ২। ১৫০ বর্গ সে.মি. ৩। ১১৫ বর্গ মি. ৪। ১৩৭৫ বর্গ মি. ৫। ৩৮৪ বর্গ মি. ৬। দৈর্ঘ্য ২১ মি., বিস্তার ৭ মি. ৭। ১২৫ ঘন মি. ৮। ৩০০ মগ ৯। ৩০০০ বর্গ সে.মি. ১০। ১২০০ বর্গ মি. ১১। ২৫৬ বর্গ মি.
১২। ২৩˙১৬ কি.গ্রা. ১৩। ৪৪,০০০ লিটার এবং ৪৪,০০০ কি.গ্রা. ১৪। ৪৫০˙০০ টাকা।

বীজগণিত

প্রশ্নমালা ১·১

1. $4k - m - n$.
2. $6a - b - 3c$.
3. $2x - z$
4. $-2a + 6b - c - 8d$.
5. $2x^3 + x^2 + 15x + 10$
6. $6xy^2 + 5$.
7. $3x^3y - 7x^2y^2 + 11xy^3$.
8. $-a^3 + 3b^3 - 2a^2b + 3ab^2$.
9. $10a^2xy^2 - 3a^2x^2y^2 + y^3 - 8$.
10. $8p^3q^3r^3 - 3p^2q^2r^2 - 2p^4q^4r^4 - 2$.
11. $\frac{5}{12}x - \frac{1}{6}y + \frac{7}{12}z$.
12. $-\frac{1}{4}a^3 + \frac{5}{8}ax^2$
13. 3.
14. 27.
15. 3.
16. -1
17. 3.
18. 36.

প্রশ্নমালা ১·২

1. $3x + 2y - 3z$
2. $-3a^2 - 9a + 7$.
3. $4a^2 - 7ab - b^2$.
4. $ax - by - 14cz$.
5. $2m^2 + 10mn - 16n^2$
6. $2x^3 - 4x^2y - 15xy^2 + 9y^3$.
7. $-a^4 - 2a^2 - 12a + 12$.
8. $-6a^2b - 2b^3$.
9. $6x^3 + 6x^2y + 5xy^2$.
10. $11x^2y - 11xy^2 - 10x^3 - 3y^3$.
11. $-a^3 - b^3 + 3a^2b - 3ab^2$.
12. $2x^5 + 3x^4y + 6y^5$.
13. $yz + zx + xy$.
14. $13a^2 + 14ab - 18b^2$.
15. $2x^3 - 7x + 10$.
16. $5x^3 + 20y^3$.
17. $-8x^3 + 3x^2y + 5xy^2 - 2y^3$.

প্রশ্নমালা ১·৩

1. $6a^3b$.
2. $-54ab^3$.
3. $10a^3x^7y$.
4. $-14a^4x^3$.
5. $-30b^4x^4yz$.
6. $15p^7q^7$.
7. $32a^4b^2x^5y^3$.
8. $70x^5y^5z$.
9. $-14a^5x^4y^9z^7$.
10. $8x^2y - 12xy^2$.
11. $2a^3bc - 3ab^3c - abc^3$.
12. $12c^4d^5 - 18c^3d^7 + 30c^3d^6$.
13. $a^7b - a^4b^4 + 3a^5b^2c$.
14. $x^2 + 9x + 20$.
15. $a^2 - b^2$.
16. $ab + ac + b^2 - c^2$.
17. $10x^2 - 51xy + 56y^2$.
18. $x^3 + 6x^2 + 5x - 12$.
19. $3a^3 + a^2b - ab^2 + 4b^3$.
20. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
21. $x^8 - y^8$.
22. $x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$
23. $8p^3 - 12p^2q + 6pq^2 - q^3$.
24. $x^4 + x^2 + 1$.
25. $a^4 + a^2b^2 + b^4$.
26. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$.

প্রশ্নমালা ১.৪

1. $4x^2$.
2. $-9a^3$.
3. $3x^6$.
4. $-5a^2x^2$.
5. $3a^2z^2y$.
6. $-2pqr^2$.
7. $-5x^3y^7$.
8. $11x$.

9. $-5y$. 10. $5ab^2y$. 11. $3a-2b$. 12. $2a^3b-3ab^2$.

13. $-b+3a^4b^4$. 14. $-x-y-z$. 15. $-3a^2+4ax-2x^2$.

16. $-2p^2+4pq+5q^2$. 17. $-x^5+3xy-4y^3$.

18. $-7ac+4a^3b^2c^4+3ab^4c^2$. 19. $3mn-7n^2-4m^2$.

20. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}xy^5-y^4z^2$ 21. a^2b^2. 22. $x-2$.

23. $3a+4$. 24. $2x-3y$. 25. $x-4y$. 26. $a+2xyz$.

27. x^2-1. 28. x^2y^2-1. 29. $5x+3y$. 30. $x-5ab$.

31. x^2+3. 32. $2ab+3d$. 33. x^2+x+1 34. a^2-b^2.

35. $9p^2-2pq-q^2$.

প্রশ্নমালা ১·৫

1. $a-b+c-d$. 2. $2x-2a$. 3. $5y-5x$ 4. $3x+4y-z+b+2c$.

5. $7b-2a$. 6. 0. 7. $5y-2x+7z$. 8. $6a-6b-18c$.

9. $5a-b+11c$. 10. $-10x+14y-18z$. 11. $2a+3b+28c$.

12. -9. 13. $x-(-y+a-b)$. 14. $-(a-b+c)+(d-e)$.

15. $3x-\{4y+(8z-5)\}$ 16. $10-[7+\{-3+(4-8)\}]$,10.

প্রশ্নমালা ২·১

1. $4a^2+12a+9$. 2. $25x^2+20xy+4y^2$. 3. $81x^2+90ax+25a^2$.

4. $9m^2+42mn+49n^2$. 5. $25a^2-70a+49$. 6. $9x^2-42xy+49y^2$.

7. $a^2x^2-2abxy+b^2y^2$. 8. $9a^2-66axy+121x^2y^2$. 9. $25a^4+90a^2m^2+81m^4$.

10. $81x^4-198x^2y^2+121y^4$. 11. 9801. 12. 1010025.

13. 994009. 14. $a^2+b^2+c^2-2ab+2ca-2bc$.

15. $a^2+4b^2+9c^2+4ab+6ca+12bc$. 16. $4x^2+y^2+z^2+4xy-4zx-2yz$.

17. $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc^2+2ab^2c+2a^2bc$. 18. $x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2z^2x^2-2y^2z^2$.

19. $a^4+4b^2+c^4+4a^2b-2c^2a^2-4bc^2$. 20. $4b^2$.

21. $16x^2$. 22. $16a^2$ 23. $a^2+4ab+4b^2$. 24. $9a^2$. 25. 1.

26. 0. 27. 4. 28. 16. 31. p^2-2. 33. 12. 35. 79.

প্রশ্নমালা ২.২

1. $16x^2 - 9$. 2. $25a^2 - 64b^2$. 3. $16a^2–49b^2$. 4. $169–144p^2$.
5. $a^2x^4–b^2$ 6. $a^2–b^2–c^2–2bc$. 7. x^4+x^2+1. 8. $16x^4+36x^2+81$.
9. $1+4x^4+16x^8$. 10. $a^8+9a^4x^4+81x^8$. 11. $x^2+25x+144$.
12. $p^2x^2 - 2px - 15$. 13. $4x^2+26x+40$. 14. $q^4x^4 + 4rq^2x^2 + 3r^2$.
15. $x^2 + x + \frac{2}{9}$ 16. $x^2 - \frac{1}{9} a^2$ 17. $\frac{1}{25} x^2 - \frac{1}{36} y^2$. 18. $x^4 - 1$.

প্রশ্নমালা ২·৩

1. $x(y+a^2)$. 2. $abc (a+b+c)$. 3. $(c+a)(a+b)$. 4. $(x-a)(x-b)$.
5. $(1+a)(1+a^2)$. 6. $(ax+by) (bp+aq)$. 7. $2(b+d)(2a-5c)$.
8. $(x+5)(x-5)$. 9. $(2x+y) (2x-y)$. 10. $(a+9b) (a-9b)$.
11. $(7+ab)(7-ab)$ 12. $(a+x+y)(a-x-y)$. 13. $(x+b-c) (x-b+c)$.
14. $5x(4x+3)(4x-3)$. 15. $(p+\frac{1}{3})(p-\frac{1}{3})$ 16. $pq (q+p) (q-p)$.
17. $(2x+3y)(2x-3y)(4x^2+9y^2)$. 18. $\frac{1}{3} (x+3) (x-3)$.
19. $(5x^2+6y^2)(5x^2-6y^2)$. 20. $(18a+11x)(19x-6a)$.
21. $(x+y)(x-y)(x^2+y^2+2)$. 22. $x^3(12x^2+5a^2)(12x^2-5a^2)$.
23. $(8+3x-3y)(8-3x+3y)$. 24. $(2x^2+6x+9) (2x^2-6x+9)$.
25. $(a-b+c)(a-b-c)$. 26. $(a+b-c)(a-b+c)$.
27. $(2x-y+z)(2x-y-z)$. 28. $(x+3)(x+2)$ 29. $(x+5)(x+6)$.
30. $(x-9)(x-5)$. 31. $(a+8) (a-5)$. 32. $(m+6)(m-5)$.
33. $(a-13)(a+7)$. 34. $(m-8)(m-7)$.

প্রশ্নমালা ৩

1. xy^4. 2. a^2b^2. 3. $2a^4x^4$. 4. xyz.
5. $4ax$. 6. $(a+b)$. 7. $a(a+b)$. 8. $ax(2a+3x)$.
9. $(x+4)$. 10. $(x–5)$. 11. $(x+2)$. 12. $(x–1)$.
13. $6a^2b^2c$. 14. $12a^2x^3c^4$. 15. $78ac^5d^4$. 16. $36a^2b^3c$.
17. $30a^3b^2x^3y^2z^2$. 18. $12x^2(x+2)$. 19. $x(x^2+3x+2)$. 20. $x^2(x^2–49)(x+3)$
21. $5a(9x^2–25y^2)$. 22. $(x–5)^2(x+2)$. 23. $a(x^2–2)(x^2+2)^2$. 24. $(a^2–7a+12)(a+5)$.

প্রশ্নমালা ৪·১

1. $\frac{1}{2b}$ 2. $\frac{1}{5ab}$ 3. $\frac{x}{yz}$ 4. $\frac{2m}{3k}$ 5. $\frac{2x^2y^2}{3z^3}$ 6. $\frac{x-3}{a}$ 7. $\frac{x+2}{x-2}$

8. $\frac{x+3}{x-3}$ 9. $\frac{2x-3a}{2x}$ 10. $-\frac{x}{x+4y}$. 11. $\frac{a-3}{a+4}$ 12. $\frac{x+2}{x+3}$ 13. $-\frac{2+9x}{x^3}$

প্রশ্নমালা ৪.২

1. $\frac{2ad}{4bd}, \frac{3bc}{4bd}$ 2. $\frac{a^2}{abc}, \frac{b^2}{abc}, \frac{c^2}{abc}$. 3. $\frac{ac+a^2}{(b+c)(c+a)}, \frac{b^2+bc}{(b+c)c+a)}$

4. $\frac{x^3+x^2y}{x(x^2-y^2)}, \frac{x^2y-xy^2}{x(x^2-y^2)}, \frac{zx-yz}{x(x^2-y^2)}$ 5. $\frac{ax^2-2bx^2}{a(a+2b)(a-2b)}, \frac{a^2y^2+2aby^2}{a(a+2b)(a-2b)}$

6. $\frac{2xb^2c^2(a-x)}{a^2b^2c^2(a^2-x^2)}, \frac{3yc^2a^2(a+x)}{a^2b^2c^2(a^2-x^2)}, \frac{4za^2b^2}{a^2b^2c^2(a^2-x^2)}$.

7. $\frac{3a+9}{(a+1)(a+3)(a-2)}, \frac{5a+5}{(a+1)(a+3)(a-2)}$.

8. $\frac{x^2+5x}{(x+3)(x-3)(x+5)}, \frac{xy+3y}{(x+3)(x-3)(x+5)}$.

9. $\frac{a^2-2a-8}{a(a+3)(a+2)(a-4)}, \frac{a^2b-4ab}{a(a+3)(a+2)(a-4)}, \frac{a^2c+2ac}{a(a+3)(a+2)(a-4)}$.

10. $\frac{ax}{a(2x+5y)(2x-5y)}, \frac{2xy-5y^2}{a(2x+5y)(2x-5y)}, \frac{2axz+5ayz}{a(2x+5y)(2x-5y)}$.

প্রশ্নমালা ৪·৩

1. $\frac{bx+ay}{ab}$ 2. $\frac{3x^3b+2ay}{ab}$ 3. $\frac{x^2-y^2}{xy}$ 4. $\frac{a^3-b^3}{ab}$

5. $\frac{x^2+y^2}{xy}$ 6. $\frac{a^2+b^2}{ab}$ 7. $\frac{2y}{x}$. 8. 2.

9. $\frac{2x-1}{x^2-x-2}$. 10. $\frac{a}{a^2+5a+6}$. 11. $\frac{a-4}{a^2-9}$. 12. $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

13. 0 . 14. 1. 15. $\frac{a+b}{2a-2b}$. 16. $\frac{1}{x+3}$

17. $\frac{x}{x^2-6x+5}$ 18. $\frac{23-4x}{x^2-4x-5}$. 19. $\frac{5x-3y}{4x^2-9y^2}$. 20. $\frac{a^2}{b(a^2-4b^2)}$.

প্রশ্নমালা ৫·১

1. 1.	2. 2.	3. 3.	4. -4
5. -2.	6. $\frac{8}{15}$	7. $2\frac{4}{11}$	8. $-6\frac{1}{2}$
9. -28.	10. 12.	11. 5.	12. 12.
13. 1.	14. 7.	15. -2.	16. -2.
17. -1.	18. 5.	19. -1.	20. 13.
21. 38.	22. 1.	23. -2	24. -7.
25. 5.	26. -6.	27. $\frac{2}{3}$	28. 41.
29. -10	30. 1.		

প্রশ্নমালা ৫·২

1. 33.	2. -6.	3. আজমল 20 বছর, শফিক 15 বছর
4. 52, 28	5. 44, 45, 46.	6. 60.
7. 23.	8. কামাল 60 টাকা, জামাল 55 টাকা, হরিপদ 62 টাকা	
9. 360 টি	10. 6 কি.মি./ঘণ্টা ও 2 কি.মি./ঘণ্টা	
11. 90 কি.মি.	12. বৃহত্তরটি 120, ক্ষুদ্রতরটি 100.	
13. 2 কি.মি./ঘণ্টা	14. 4 কি.মি./ঘণ্টা	15. 49 টাকা।

জ্যামিতি

অনুশীলনী ১·১

১। $x = 60°$, $y = 120°$, $z = 60°$

$p = 135°$, $q = 55°$, $r = 135°$

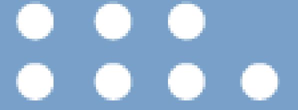
$u = 50°$, $v = 130°$, $w = 50°$

অনুশীলনী ২·৭

১। $x = 42°$, $y = 48°$, $z = 42°$

২। $65°, 65°$,

সমাপ্ত





সমৃদ্ধ বাংলাদেশ গড়ে তোলার জন্য যোগ্যতা অর্জন কর

– মাননীয় প্রধানমন্ত্রী শেখ হাসিনা

আলস্য দোষের আকর



২০১০ শিক্ষাবর্ষ থেকে সরকার কর্তৃক বিনামূল্যে বিতরণের জন্য